Índice

Catro vellos mariñeiros

Proporcionalidad, coordenadas y funciones

En esta sección vamos a ir navegando por varios conceptos matemáticos que te permitirán llegar a buen puerto en la búsqueda del tesoro.

Comenzaremos viendo relaciones entre magnitudes y, si existe un tipo de relación concreto entre ellas, aprenderemos a calcular los pares de valores para cada una de ellas. Esto por ejemplo te permitirá saber cuánto tendrás que aumentar tus víveres si aumentas los días de tu travesía.

Después veremos qué es el plano cartesiano y cómo los sistemas de referencia nos permiten situarnos mejor, por ejemplo, en un mapa.

Finalmente, juntaremos los dos conceptos previos de relación entre magnitudes y el plano cartesiano con un poco de lenguaje algebraico y llegamos a las funciones, expresiones matemáticas que transforman el valor inicial que le damos en un nuevo valor.

¿Estás preparado para surcar los mares matemáticos?

¿Cuál será nuestra estrategia?

Para poder movernos en el mapa y así llegar a encontrar el tesoro debemos seguir los siguientes pasos:

1. Identifica magnitudes directamente proporcionales.
2. Calcula la constante de proporcionalidad y la usa para calcular cantidades.
3. Calcula los datos que necesita para planificar el viaje a partir de las magnitudes y los porcentajes.
4. Ubica puntos en el mapa a través de las coordenadas cartesianas.
5. Identifica e interpreta correctamente la información de funciones.
6. Aprende a manejar herramientas tecnológicas que te permitan resolver actividades relacionadas con funciones.

1. Proporcionalidad y porcentajes

Cuando hacemos una fotografía conseguimos una imagen del objeto que tenemos en la realidad que aunque no conserva el tamaño real, sí conserva las proporciones.

Si tenemos dos barcos y en la realidad uno mide de largo el doble que el otro, en la fotografía era relación no se va a alterar. El largo seguirá siendo el doble el uno que el otro.

Este tipo de relaciones matemáticas las vamos a ver en este epígrafe, son relaciones proporcionales en magnitudes. Lo que va a ocurrir es que cuando transformemos una de las magnitudes, como están relacionadas, la otra se va a transformar también, para que se pueda seguir manteniendo esa relación.

1.1. Definiciones

Magnitud: Propiedad que puede ser medida. Por ejemplo, podemos medir una longitud de un barco, de modo que longitud sería una magnitud, pero no podemos medir la belleza de una travesía por el mar, por lo que la belleza no sería una magnitud.

Las magnitudes no solo son un número que representa lo que se mide, las magnitudes tienen una unidad de medida asociada. No basta decir la longitud del barco, hay que decir si se está midiendo en metros o en centímetros, por ejemplo. O si estamos midiendo las personas que tienen familia marinera, la unidad de medida son las personas, no basta decir 7, ¿siete qué? Pues siete personas.

Razón: La razón entre dos números es el cociente que se obtiene cuando relacionamos dos números.

Por ejemplo, si 15 personas de las 25 les habría gustado ser piratas cuando eran pequeñas, tenemos la razón $\frac{15}{25}$.

Proporción: Cuando tenemos dos razones que son iguales, tenemos una proporción.

Por ejemplo, decir que 15 personas de 25 querían ser piratas cuando eran pequeñas, es lo mismo que decir que 3 de cada 5 personas querían ser piratas cuando eran pequeñas, esto es porque: $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

Porcentaje: Cuando en una razón el denominador es 100, vamos a tener un porcentaje. Es decir, nos indicaría cuántas unidades cumplirían la propiedad a la que hacemos referencia, si tuviésemos un total de 100 unidades de la magnitud que estamos midiendo.

$$\frac{15}{25}=\frac{60}{100}$$

Si en lugar de 25 personas hubiese 100, lo que ocurriría es que a 60 de ellas de pequeñas les habría gustado ser piratas.

El símbolo que se utiliza para indicar porcentaje es % y se lee "por ciento". Por lo que en nuestro ejemplo diríamos que el 60% de las personas querían ser piratas cuando eran pequeñas.

1.2. Razón

Cuando estamos haciendo referencia a propiedades que podemos medir y las queremos relacionar, escribimos una razón entre ellas. Una **razón** es un cociente que escribimos como fracción.

En este caso en la fracción no estamos haciendo referencia a las partes de un todo, estamos indicando una relación.

Por ejemplo, la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recorrerse. Si decimos, después de 3 horas de navegación el barco estaba a 200 kilómetros de la costa, tenemos la razón $\frac{200}{3}$.

O podemos relacionar los kilos de algo que se compra con el precio que se paga. Ha pagado 24,15 euros por kilo y medio de xoubas, tenemos la razón $\frac{24{,}15}{1{,}5}$. Fíjate, cuando hablamos de razón en la fracción pueden aparecer decimales.

También podemos establecer una relación entre dos medidas de la misma magnitud. El primer barco que zarpó tenía 27 metros de eslora, mientras que este que va a salir ahora tiene una eslora de 15 metros, la razón es $\frac{27}{15}$ y como $\frac{27}{15}=1{,}8$ lo que quiere decir es que el primer barco es 1,8 veces el segundo.

1.3. Proporción y constante de proporcionalidad

Cuando tenemos dos razones y estas son equivalentes, tenemos una **proporción**.

Por ejemplo, de las 30 mariscadoras que salieron ayer a trabajar en Aguiño, 20 ya salían a mariscar de niñas con su abuela y su madre. Tenemos la razón $\frac{20}{30}$. Y de las 75 que salieron ayer a trabajar en Cambados, 50 también iban a mariscar de niñas con su abuela y su madre. En este caso la razón es $\frac{50}{75}$.

Como se cumple que $\frac{20}{30}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$ tenemos que la proporción de mariscadoras que iban a mariscar de pequeñas con su abuela y su madre es la misma en Aguiño y en Cambados, que sería la de dos tercios de las mariscadoras.

La **constante de proporcionalidad directa** es el resultado de la división entre las dos cantidades. Cuando varias razones tienen la misma constante de proporcionalidad es porque esas razones forman una proporción.

En el caso anterior $\frac{20}{30}=0{,}67$ que como podemos ver es el mismo para las otras razones $\frac{50}{75}=0{,}67$, $\frac{2}{3}=0{,}67$, es por ello que son razones proporcionales.

Una de las propiedades que nos permite ver que dos razones son equivalentes, y por tanto proporcionales, es comprobar que el producto de extremos es igual al producto de medios. Esta propiedad nos servirá para resolver problemas de proporcionalidad.

Como con $\frac{20}{30}$ y $\frac{50}{75}$ se cumple que $20\cdot 75=50\cdot 30$, es decir $1500=1500$, las razones son proporcionales, como ya hemos indicado en los párrafos anteriores.

1.4. Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar (o dividir) una por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Por ejemplo, si nuestro barco navega a velocidad constante, el número de horas que estamos navegando y la distancia que recorremos son directamente proporcionales. Si navegamos el doble de horas, recorreremos el doble de distancia.

Fíjate, no siempre las magnitudes son directamente proporcionales, entre la velocidad y el tiempo que se tarda en recorrer una distancia también hay una relación, pero no es de proporcionalidad directa, porque si el barco va al doble de velocidad, es decir, más rápido, no tarda el doble de tiempo.

Como ya vimos, si dos magnitudes son directamente proporcionales, la división de las cantidades correspondientes no varía, y a ese valor se le llama **constante de proporcionalidad directa**.

Si nuestro barco navega a velocidad constante y hemos recorrido 160 kilómetros en 2 horas, como las magnitudes son directamente proporcionales, tenemos que la constante de proporcionalidad directa es $\frac{160}{2}=80$.

Sabiendo la constante de proporcionalidad directa, podemos completar tablas que relacionan las dos variables. Porque para cada par de números, cuando hagamos el cociente, tiene que dar ese valor.

Distancia (km)	80	160	240	280	400
Tiempo (h)	1	2	3	3,5	5

Se puede comprobar que con todos los pares de valores, al hacer el cociente da lo mismo, 80. Así si quisiésemos saber cuántos kilómetros recorrió después de una hora y media, sería $\frac{x}{1{,}5}=80 \Rightarrow x=80\cdot 1{,}5=120$ kilómetros.

O si queremos saber cuántas horas han pasado desde que empezó a navegar si lleva recorridos 300 kilómetros, sería $\frac{300}{x}=80 \Rightarrow x=\frac{300}{80}=3{,}75$ horas.

Quién divide a quién

Si alguno de vosotros se está preguntando, ¿cómo sé qué magnitud es la que va en el numerador y cuál en el denominador para calcular la constante de proporcionalidad directa? no os preocupéis, no pasa nada por hacerlo "al revés". Lo único que tenemos que tener siempre bien claro que magnitud usamos para el numerador y cuál para el denominador y no intercambiarlas a mitad del problema.

Tiempo (h)	1	2	3	3,5	5
Distancia (km)	80	160	240	280	400

Se puede comprobar que con todos los pares de valores, al hacer el cociente da lo mismo, $\frac{1}{80}=0{,}0125$.

Así si quisiésemos saber cuántos kilómetros recorrió después de una hora y media, sería $\frac{1{,}5}{x}=0{,}0125 \Rightarrow x=\frac{1{,}5}{0{,}0125}=120$ kilómetros.

O si queremos saber cuántas horas han pasado desde que empezó a navegar si lleva recorridos 300 kilómetros, sería $\frac{x}{300}=0{,}0125 \Rightarrow x=300\cdot 0{,}0125=3{,}75$ horas.

1.5. Resolver problemas de proporcionalidad directa

Cuando tenemos que resolver un problema en el que las magnitudes son directamente proporcionales y hay un dato que no sabemos podemos utilizar uno de estos métodos.

Proporciones

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, las razones que se forman con esos pares de valores van a ser proporcionales. De modo que si falta algún valor se podrá calcular igualando las razones y resolviendo.

Problema: Roque compró 2 kilos de mejillones y pagó 9 euros. Si Nerea compra 2,5 kilos de mejillones, ¿cuánto pagará?

Resolución: ¿Recuerdas la propiedad de producto de medios es igual al producto de extremos vista en el epígrafe "Razón y proporción"? Esta se cumplía cuando dos magnitudes eran directamente proporcionales.

Como los kilos de mejillones que se compra y lo que se paga por ellos son magnitudes directamente proporcionales, tenemos que:

$$\frac{2}{9}=\frac{2{,}5}{x} \Rightarrow 2x=2{,}5\cdot 9 \Rightarrow x=\frac{2{,}5\cdot 9}{2}=11{,}25$$

Por lo que Nerea pagará 11,25 euros.

Reducción a la unidad

En los problemas de proporcionalidad directa resulta útil saber el valor que tendría una de las magnitudes si la otra valiese uno. Es decir, calcular la constante de proporcionalidad directa, y luego usarla para obtener valores de la otra magnitud. Vamos a verlo con un ejemplo, que se entiende mejor y luego ya se indica el proceso general.

Problema: Roque compró 2 kilos de mejillones y pagó 9 euros. Si Nerea compra 2,5 kilos de mejillones, ¿cuánto pagará?

Resolución: Los kilos de mejillones que se compra y lo que se paga por ellos son magnitudes directamente proporcionales vamos a resolver este problema por reducción a la unidad:

- Calculamos lo que valdría un kilo de mejillones, dividimos los kilos que compramos entre los euros que pagamos: $\frac{9}{2}=4{,}5$ euros/kilo (constante de proporcionalidad directa para el precio respecto a los kilos)

- Calculamos lo que valdrían dos kilos y medio, multiplicamos lo que vale un kilo por la cantidad de kilos que vamos a comprar: $4{,}5\cdot 2{,}5=11{,}25$ euros

Por lo que Nerea pagará 11,25 euros.

Supongamos que tenemos dos magnitudes A y B y el dato que no sabemos es de B.

- Calculamos la constante de proporcionalidad directa de B respecto a A, B/A. Es decir repartimos la cantidad de B entre las cantidades que tenemos de A y así sabemos lo que correspondería a B si tuviesemos una unidad de A.
- Multiplicamos lo que le corresponde a una unidad por el número de unidades que tenemos y obtenemos el resultado buscado.

1.6. Porcentajes

El concepto de porcentaje, tiene sus orígenes en el siglo I con el emperador Augusto. Lo de pagar impuestos no es nuevo, Augusto recaudaba un impuesto del 1 sobre 100 a los bienes.

Cuando pensamos en porcentajes ya tenemos muy interiorizada esta cantidad, de manera que si la base no fuese 100 nos costaría más hacernos una idea de la magnitud. Seguramente te sea más fácil entender que un pantalón tiene un descuento del 20% que del 200 por mil. ¿No es así?

Veamos ahora formalmente qué es un porcentaje:

Un **tanto por ciento** o **porcentaje** es una razón con denominador 100. Para representarlo utilizamos el símbolo %, por ejemplo 7% sería "el siete por ciento".

Cuando hablamos de porcentajes lo que estamos haciendo es considerar que tenemos 100 unidades de algo y se indica cuántas cumplen una propiedad.

La constante de proporcionalidad asociada será la cantidad que tomemos dividida entre 100.

Si tenemos en cuenta la información anterior vemos que tenemos diferentes maneras de representar el porcentaje: $7\%=\frac{7}{100}=0{,}07$.

1.7. Porcentaje de una cantidad

Para calcular el porcentaje de una cantidad podemos multiplicar por la fracción que representa el porcentaje o bien por la constante que lo representa.

Por ejemplo, si tenemos el 7% de 50, lo calculamos así: $50\cdot\frac{7}{100}=3{,}5$ o bien $50\cdot 0{,}07=3{,}5$.

En el caso de que lo que conozca es la cantidad a la que equivale el porcentaje y quiera saber la cantidad inicial, basta despejar en la expresión. Habría que dividir bien por la razón o bien por la constante que representa el porcentaje.

Sabemos que el 7% de una cantidad es 28, ¿de qué cantidad se trata? Es decir, tenemos 7% de *x* = 28, entonces $\frac{28}{7/100}=28\cdot\frac{100}{7}=400$, o bien $\frac{28}{0{,}07}=400$.

Porcentajes populares

Como un porcentaje se trata de una razón, tenemos un cociente que podemos simplificar en muchas ocasiones, lo que nos facilitará los cálculos.

- El 50% es $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$. Será la mitad de una cantidad.
- El 25% es $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Será la cuarta de una cantidad.
- El 10% es $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Será una décima parte de una cantidad, dividir entre 10.

Porcentajes y proporcionalidad

Puede que haya quien se esté preguntando: ¿Y por qué me han añadadido este epígrafe de porcentajes aquí? ¿Qué tiene que ver con lo que estaba viendo de proporcionalidad?

Pues bien, vamos a pensarlo un poco, ¿cuando tenemos un porcentaje no tenemos una relación de proporcionalidad directa? Pues claro que sí. Cuando hacemos un porcentaje es como comparar qué pasaría si el total de lo que tenemos fuese 100.

De 25 piratas, llevan parche en el ojo 10. Si tuviese 100 piratas llevarían parche 40. Si ahora duplicase el número de piratas que llevan parche, duplicaría el porcentaje: $\frac{10}{25}=\frac{40}{100}, \frac{20}{25}=\frac{80}{100}$

Un extra: descuentos e incrementos

Los porcentajes aparecen de manera habitual para hacer descuentos de una cantidad: "estas botas de agua están rebajadas un 20%", o para incrementar una cantidad: "el incremento por el IVA de este producto es de un 21%".

En estos casos podemos proceder paso a paso:

1. Calcular el porcentaje de la cantidad
2. Restar (si es descuento) o sumar (si es incremento) a la cantidad inicial el resultado que obtuvimos en el paso 1

Pero también podemos recurrir a algo de aritmética y álgebra para hacerlo de forma directa en un solo paso.

Lo que hacemos al proceder paso a paso es $x \pm x \cdot \frac{p}{100}$. Observa: $x \pm x \cdot \frac{p}{100} = x \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$

De modo que si quieres calcular un descuento, lo que haces es restarle a 1 la constante que equivale al porcentaje y multiplicarlo por la cantidad sobre la que hay que hacer el descuento. Y si quieres calcular un incremento, en vez de restar sumas. Veamos un ejemplo con el método abreviado y lo puedes hacer en tu libreta por pasos para comprobar que da lo mismo.

Problema 1

Las botas de agua que valen 60 euros, tienen un descuento de un 20%. ¿Cuánto pagaré por ellas finalmente?

$20\% = 0{,}20$

Por lo que para calcular el precio que pago multiplico por: $1 - 0{,}20 = 0{,}80 \quad 60 \cdot 0{,}8 = 48$

Pagaré 48 euros.

Problema 2

El precio de las botas de agua, que valen 60 euros, aparece sin el IVA, que es un 21%. El IVA es un impuesto que hay que añadir al precio. ¿Cuánto pagaré por ellas finalmente?

$21\% = 0{,}21$

Por lo que para calcular el precio que pago multiplico por: $1 + 0{,}21 = 1{,}21$

$60 \cdot 1{,}21 = 72{,}6$ Pagaré 72,6 euros.

2. Coordenadas

2.1. ¿Para qué valen las coordenadas?

Como vimos en el punto anterior, una cámara de fotos mantiene las proporciones, con un mapa también pasa esto. Y nosotros, dibujando, ¿seremos capaces de mantener las proporciones? A continuación, vamos a realizar una actividad en parejas. Cada uno de los integrantes tendrá dos roles diferentes:

1º la persona A deberá describir el dibujo 1 y la persona B hacer el dibujo.

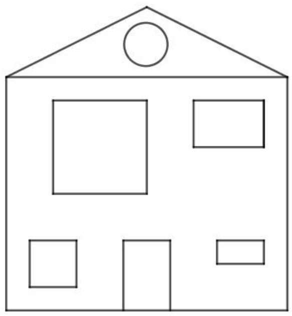
2º a la inversa, la persona B será ahora la que describe el dibujo 2 y la A la que dibuja.

Por ejemplo, si a mí me toca describir el dibujo, deberé explicar lo que estoy viendo de forma suficientemente clara, para que la otra persona sea capaz de realizar un diseño lo más parecido posible. Es decir, debéis describir las formas presentes en el dibujo, su tamaño, a qué distancia aproximada están una de la otra, etc.

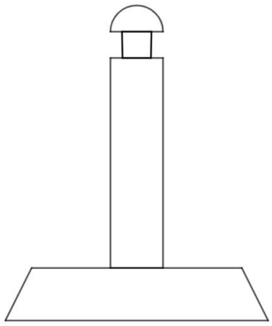
Una vez acabado el primer dibujo, cambiamos los papeles, el dibujante pasa a describir el otro diseño, y la persona que estaba describiendo pasa a dibujar.

Pero, ¡no hagas trampas!, no vale espiar el dibujo que tiene tu compañero.

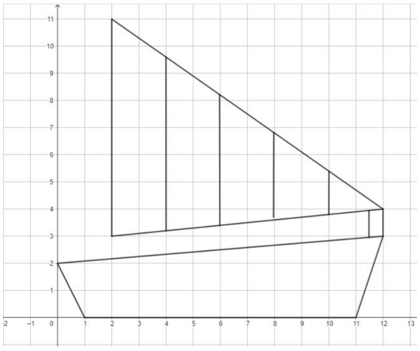
Dibujo 1



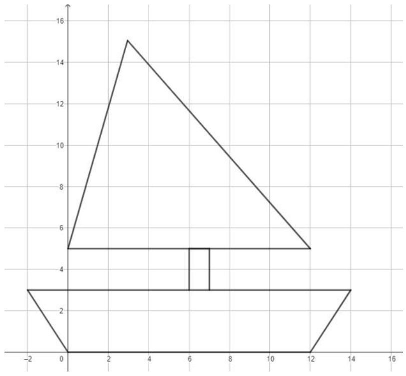
Dibujo 2



Probablemente los dibujos hechos a partir de la descripción no se parezcan mucho al original. Vamos a intentarlo otra vez, fíjate ahora que las indicaciones que debes dar son más precisas:



Dibujo 3



Dibujo 4

Ahora podrías describir la posición de cada punto del dibujo a partir de los números que parecen en horizontal y en vertical. Así tu compañera/o lo tendrá más fácil aunque no vea el dibujo original.

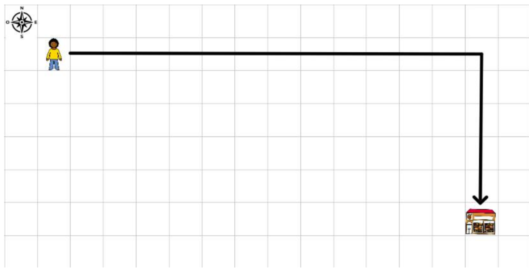
Esta vez, los dibujos ya se parecen más a los originales, ¿será por la práctica?, ¿o quizás por las referencias que tomasteis?

Como acabas de comprobar, el uso de coordenadas hace que mediante explicaciones referidas a un sistema de coordenadas la otra persona sea capaz de ubicar los puntos en el plano.

Es decir, las coordenadas además de usarlas en matemáticas, nos valen para localizar sitios en los mapas, para describir objetos o direcciones, etc.

Por ejemplo, si vemos el mapa de nuestro pueblo, ciudad o el globo terráqueo, estará dividido en sectores con líneas horizontales y verticales. Así para saber dónde se encuentra una localización necesitaremos saber sus coordenadas.

También usamos las coordenadas cuando localizamos lugares con el GPS.



2.2. El plano

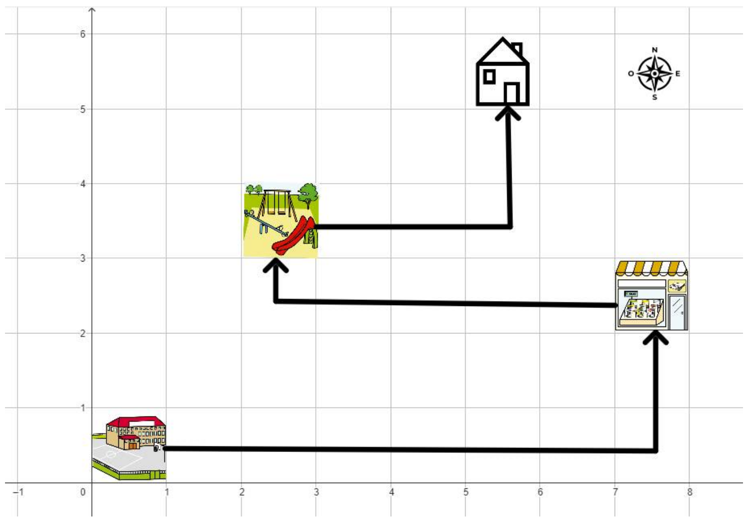
Si tenemos que explicarle a Roque cómo llegar de donde se encuentra a la biblioteca, y tenemos un plano como el que aparece a la izquierda, le indicaríamos:

"tienes que desplazarte hasta el cuadrado 13 al este y a continuación 5 cuadrados al sur".

Como él tiene las mismas referencias en el plano que nosotros, sería capaz de llegar a la librería.

Imaginemos que Mariña tiene un plano como el de la foto, en el que cada cuadrícula representan 10 metros en la realidad. Es decir, si tenemos media cuadrícula serían 5 metros. Y necesita explicarle a sus amigos cómo deben hacer para llegar del instituto a su casa, pasando por el quiosco y el parque. Les podría decir:

"Para llegar del instituto a mi casa tenéis que caminar 65 metros al este, después de seguir 15 metros al norte encontráis el quiosco, salís por la entrada de la izquierda y tenéis que andar 45 metros al oeste y 5 metros al norte y os encontráis con el parque. Continuáis 25 metros al este y 15 metros al norte y ya encontrareis mi casa"



Es lo mismo que pasa si queremos describir un objeto, como acabamos de ver con los dibujos, es decir, si no tenemos una referencia común, no nos entenderemos.

Por tanto, es muy importante tener unas referencias comunes y claras. Siempre que damos unas indicaciones referidas a un plano tenemos que dar el sentido de la marcha y la distancia a recorrer.

2.3. El plano cartesiano

Las coordenadas no solo se usan en matemáticas. Cuando necesitamos orientarnos en un mapa utilizamos un tipo de coordenadas, las coordenadas geográficas.

Sistemas de coordenadas geográficas

En los mapas tenemos un sistema de referencia que es el sistema de coordenadas geográficas, utiliza los grados de latitud y longitud, y a veces la altitud de un punto sobre la superficie terrestre.

Así por ejemplo, las coordenadas de Santiago de Compostela, la capital de Galicia, son 42°52'49.9" N 8°32.741' O.

Las coordenadas de un punto determinado son muy fáciles de encontrar, ya que en Internet tenemos muchas aplicaciones que nos las indican directamente.

El sistema más popular se denomina WGS 84.

Para practicar con este tipo de coordenadas, hay una actividad de GeoGebra en el punto 1.1.

Ver vídeo [Te lo cuenta una piloto: Taller tecnológico (Parte 1)]
En Matemáticas el sistema de referencia que usamos se denomina **sistema de referencia cartesiano**.

El que nosotros veremos a continuación será en dos dimensiones, pero podemos verlo en tres o más dimensiones.

Coordenadas cartesianas

El sistema cartesiano es el sistema que nos permite localizar un punto en el espacio. Debe su nombre al filósofo y matemático René Descartes (1956-1650).

Cuando el sistema de referencia lo usamos en el plano bidimensional lo llamamos **plano cartesiano**.

El sistema cartesiano contribuyó al desarrollo de la matemática moderna, pues permite vincular el Álgebra y la Geometría.

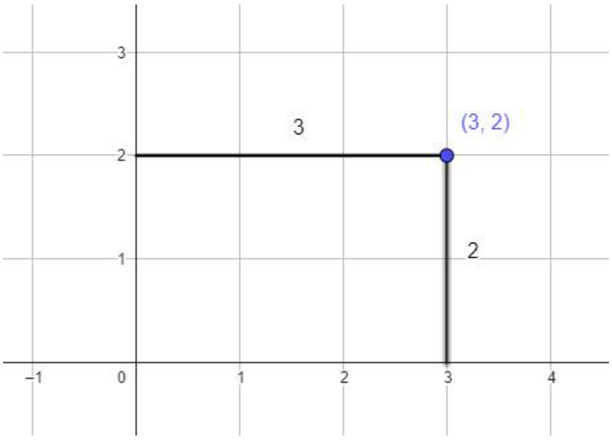
Las coordenadas cartesianas nos sirven, por tanto, para localizar un punto en el espacio. En este curso, vamos a trabajar en el plano cartesiano, por lo tanto, solo tendremos dos coordenadas.

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas graduadas perpendiculares, denominadas **ejes de coordenadas.**

El eje horizontal es el **eje de abscisas** o eje de las X, y el eje vertical es el **eje de ordenadas** o eje de las Y. El punto en el que se cortan es el **origen de coordenadas, O**.

Para saber las coordenadas de un punto (que nombraremos con una letra mayúscula: A, B, C, P, Q, R...) tenemos que tener dos coordenadas: **(abscisa, ordenada)**

Por ejemplo, el punto P(3, 2) estará a distancia 3 del eje de ordenadas y a distancia 2 del de abcisas.



2.4. Cuadrantes

El plano cartesiano con el eje de abscisas y el de ordenadas queda dividido en cuatro partes, que son los **cuadrantes.**

Se numeran de en sentido contrario a las agujas del reloj, siendo el 1º el que se encuentra en la parte superior derecha.

Primer cuadrante

- Las coordenadas X e Y son números positivos.
- X es positiva, está a la derecha del origen.
- Y es positiva, está por encima del origen.
- De forma abreviada podemos escribir (+, +)

Segundo cuadrante

- X está a la izquierda del origen, es negativa.
- Y es positiva, está por encima del origen.
- Las coordenadas serán (-, +)

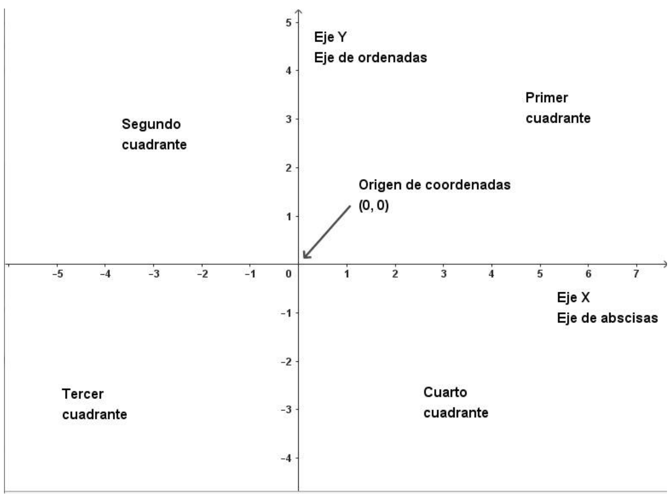
Tercer cuadrante

- Ambas coordenadas son negativas.
- X está a la izquierda del origen.
- Y está por debajo del origen.
- Podemos escribir (-, -).

Cuarto cuadrante

- La abscisa, coordenada de la X, está a la derecha del origen, por tanto es positiva.
- La ordenada es negativa, porque se encuentra por debajo del origen.
- Por tanto, (+, -).

Podemos ver en el dibujo los cuatro cuadrantes y los signos de sus coordenadas:



2.5. Coordenadas

Para situar los puntos en un mapa, o en el plano cartesiano, necesitamos indicar a partir de un punto (en nuestro caso el origen de coordenadas) cuánto nos hemos movido a izquierda o derecha y arriba o abajo.

Así cada punto quedará determinado por esas dos características, ese par de números se denomina **coordenadas** del punto: **(abscisa, ordenada)**.

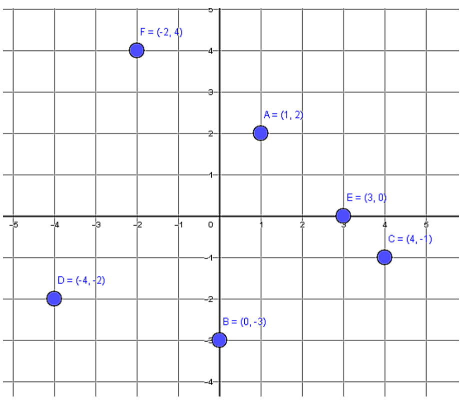
Las coordenadas de un punto P son el par ordenado de números **(x, y):**

- la primera coordenada, **x** es la coordenada de la **abscisa** y nos indica a qué distancia del eje vertical se encuentra el punto.
- la segunda coordenada, **y**, es la **ordenada**, e indica la distancia del punto al eje horizontal.

Cuando en el eje horizontal, en las abscisas, nos movemos a la izquierda del origen, las coordenadas de los puntos serán negativas. Lo mismo sucede con la ordenada cuando estamos por debajo de origen.

Si un punto se encuentra sobre el eje de abscisas, su ordenada será 0, será de la forma (x, 0). Y en caso de estar sobre el eje de ordenadas, será 0 la coordenada de la abscisa, (0, y).

Observa las coordenadas de los siguiente puntos:



El punto A tiene de coordenadas (1, 2). Como ambas son positivas el punto está en el primer cuadrante.

B tiene de coordenadas (0, -3). Como la coordenada de la abscisa es cero, el punto está sobre el eje de ordenadas o eje de las Y.

El punto C tiene de coordenadas (4, -1). La abscisa es positiva y la ordenada es negativa, el punto se encuentra en el cuarto cuadrante.

D tiene de coordenadas (-4, -2). Ambas coordenadas son negativas, el punto está en el tercer cuadrante.

El punto E está sobre el eje de abscisas porque la coordenada de la y es cero. Sus coordenadas son (3, 0).

En el segundo cuadrante está el punto F, ya que su abscisa es negativa y su ordenada positiva. Las coordenadas de este punto son (-2, 4).

2.6. Coordenadas y tablas

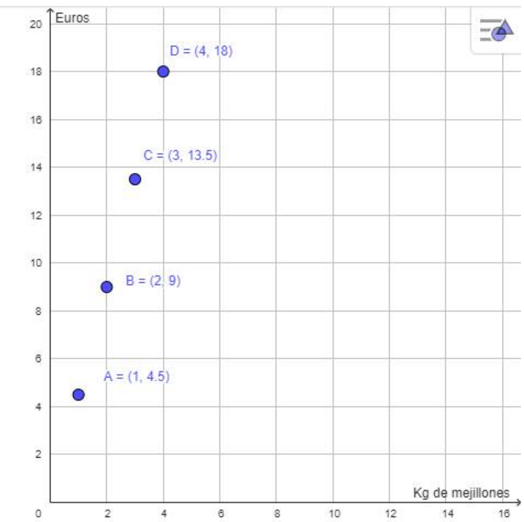
Las coordenadas de un conjunto de puntos podemos encontrarlas expresadas en tablas, en vez de como parejas de pares ordenados. En este caso, ya sean tablas horizontales o verticales, cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, y viceversa.

Veamos un ejemplo: Roque compró 2 kilos de mejillones y pagó 9 euros.

Este ejemplo es uno de los que acabamos de ver en magnitudes directamente proporcionales. Como el peso y el precio por kilogramo son magnitudes directamente proporcionales, podemos calcular los siguientes datos y ponerlos en una tabla:

Peso, kg, de los mejillones (x)	1	2	3	4	5
Precio, € (y)	4,5	9	13,5	18	22,5

A la izquierda vemos estos datos en un eje de coordenadas:



Observación: Como acabamos de ver en el ejemplo anterior, no siempre es necesario representar los ejes de coordenadas completos. Podemos hacer solo las ramas positivas, o la negativas, un cuadrante, dos o los cuatro.

Al representar los ejes de coordenadas la escala que usamos en las abscisas no tiene que ser la misma que usamos en las ordenadas.

3. Funciones

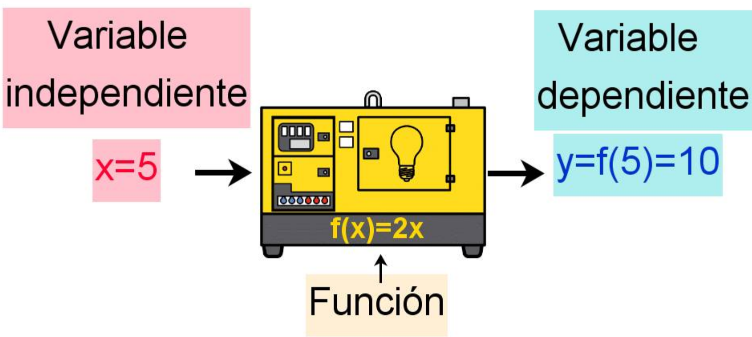
3.1. Funciones y variables

En el siglo XVII, el matemático Leibniz introdujo el término función en el vocabulario matemático. Actualmente, las funciones resultan imprescindibles en todos los campos de la matemática aplicada como la economía, las ciencias sociales, los fenómenos de la naturaleza, la física, la química, la tecnología, la biología o la geología, pero… ¿qué es una función?

Función: Una función representa la relación entre dos variables: una de entrada o variable independiente, que se suele llamar "x"; y una variable de salida o dependiente, que se suele llamar "y", de manera que **para cada valor de "x" le corresponde un único valor de "y"**.

Variable independiente, x: Los valores de entrada que le podemos dar a una función y con los que tiene sentido hacer los cálculos, se le llama **variable independiente**.

Variable dependiente, y: Los valores de salida que resultan de hacer las cuentas con la variable independiente en la función, corresponden a la **variable dependiente**.



3.2. Funciones en forma de gráficas

Las gráficas nos permiten comprender la información que nos da una función de una forma más visual, por eso, ¡¡¡es importantísimo saber crearlas y también analizarlas!!!

En esta sección veremos cómo analizar gráficas de funciones y en las siguientes construiremos las gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o bien enunciados verbales para poder analizar los datos de una manera más amigable.

Para empezar a analizar una gráfica, tenemos que conocer las partes que tiene y qué decir de los datos una vez que las observamos.

Título: Cuando una gráfica representa la relación entre dos magnitudes, es conveniente indicar el título que identifique la relación y resuma el contenido de la gráfica.

Ejes: En los ejes se representan las variables del gráfico. En el eje X, o eje de abscisas, se representan las variables independientes. Suelen encontrarse en la parte inferior del gráfico. En el eje Y, o eje de ordenadas, se representan las variables dependientes. Suelen encontrarse en la parte izquierda del gráfico. Es muy importante que los ejes estén bien escalados para visualizar claramente los datos sin distorsionar la información.

Etiquetas de los ejes: En las etiquetas de los ejes se incluye información sobre las magnitudes correspondientes a cada eje (cuál es la magnitud que está representada, cuáles son sus unidades,…)

Leyenda: En ocasiones, sobre todo cuando se representan varias funciones en los mismos ejes, aparece una leyenda al lado de la gráfica que nos indica qué gráfica (o qué datos) corresponden a cada función.

Cómo leemos una gráfica

Información explícita:

La información explícita es aquella que nos da la gráfica directamente en el título, el eje x y el eje y o la leyenda. En esta gráfica la información explicita será:

- **Título**: El título de esta gráfica es "Precio del pescado".
- **Etiqueta del eje x**: Kilogramos
- **Etiqueta del eje y:** Euros
- **Leyenda**: La línea verde corresponde a la **sardina** y la línea morada al **mejillón**

Información implícita:

La información implícita es aquella que está incluida en la gráfica pero que no está escrita directamente, pero que se sobreentiende. En esta gráfica podríamos decir:

Este es un gráfico de líneas en el que se representan dos funciones: el precio de la sardina y el precio del mejillón en función de los kilogramos que se compren de cada uno de ellos hasta un máximo de 5Kg.

Análisis de la gráfica:

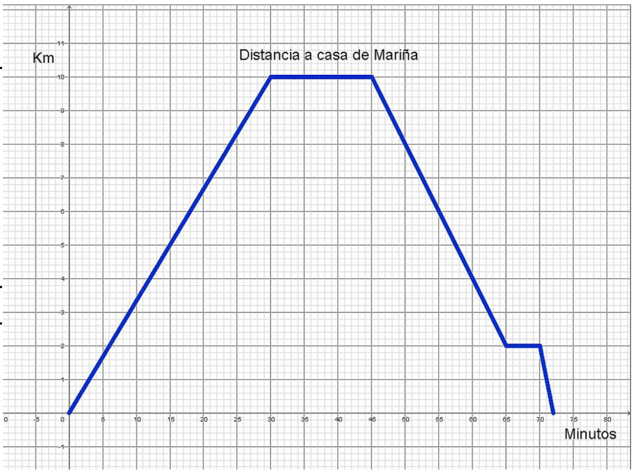
Analizar una gráfica consiste en relacionar toda la información explícita e implícita que nos da la gráfica con los conocimientos que tenemos. Por ejemplo, un análisis para esta gráfica sería:

Esta gráfica muestra cómo aumenta el precio de la sardina o el mejillón en función de la cantidad de kilogramos que se compren. Es una gráfica lineal que nos indica que el precio aumenta si aumentamos el número de kilos. Por otro lado, podemos observar que la sardina es más cara que el mejillón habiendo una diferencia de 30€ si compramos 5 Kg de sardina o 5Kg de mejillón.

3.3. Funciones expresadas mediante un enunciado verbal

En situaciones de la vida real, no tenemos siempre una gráfica o una expresión matemática para describir una función, sino que esta es consecuencia de una experiencia o experimento. En casos como este, para interpretar mejor los datos, podemos trasladar esa información verbal a una gráfica. Vamos a dibujar la gráfica correspondiente a la distancia a la que se encuentra Mariña de su casa según el siguiente enunciado verbal:

Mariña y su pandilla salen con su bicicleta el sábado por la mañana. Durante la primera media hora recorren 10 Km, momento en el que se encuentran con una vecina y se paran a hablar durante un cuarto de hora. Como aún tiene que ir a comprar el pan, Mariña se despide, coge su bicicleta y 20 minutos más tarde llega a la panadería, que está a 2 Km de su casa. 5 minutos después, se vuelve a montar en la bici y llega a su casa en 2 minutos, justo a tiempo para comer.



3.4. Funciones en forma de tablas

Otra forma muy útil de representar funciones es a través de una tabla de valores.

Una tabla de valores no es más que una tabla donde indicamos los valores de la variable independiente y su valor correspondiente de la variable dependiente.

Estas tablas son muy útiles ya que nos permiten visualizar los pares de puntos que luego representaremos en una gráfica. Veamos unos ejemplos.

El precio del pescado

Volvamos a la gráfica "Precio del pescado" que vimos en el apartado "Funciones en forma de gráfica".

Podemos recoger de esta tabla las parejas de puntos que se corresponden con cada una de las funciones y escribirlos en una tabla.

En esta gráfica, tenemos dos funciones, así que tendremos dos tablas: precio de la sardina, y otra precio del mejillón.

Veamos cómo sería la tabla vertical para la función que relaciona los kilos de sardina con su precio:

Precio de la sardina

x (Kg)	y (€)
0	0
0,5	4,5
1	9
1,5	13,5
2	18
2,5	22,5
3	27
3,5	31,5
4	36
4,5	40,5
5	45

Precio del mejillón

x (Kg)	y (€)
0	0
0,5	1,5
1	3
1,5	4,5
2	6
2,5	7,5
3	9
3,5	10,5
4	12
4,5	13,5
5	15

También podemos escribir la tabla en horizontal. Veamos en este caso las tablas escritas en horizontal:

Precio de la sardina

x (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y (€)	0	4,5	9	13.5	18	22,5	27	31,5	36	40,5	45

Precio del mejillón

x (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y (€)	0	1,5	3	4.5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15

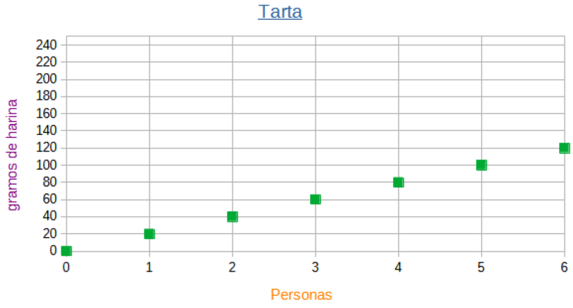
Haciendo una tarta

Otra utilidad de las tablas de datos es poder hacer la operación inversa, es decir, dibujar la gráfica a partir de los datos obtenidos experimentalmente o a través de una expresión matemática.

¡En casa de Mariña hoy están de fiesta! Así que, a Mariña le toca preparar la tarta, su madre le da la cantidad de harina que necesita para hacer la tarta en función de las personas a las que va a invitar, así:

Harina para la tarta

Número de personas	Gramos de harina
0	0
1	40
2	80
3	120
4	160
5	200
6	220



Como podéis observar, en este gráfico **no tiene sentido unir los puntos**, ya que no puedes dar de comer a media persona o a una persona y media. Es importantísimo ver en contexto en el se trabaja, es decir, cuál es la variable dependiente y cuál la independiente para saber si tiene sentido unir los puntos o no.

3.5. Funciones como expresión algebraica

En la sección anterior vimos cómo pasar de tablas a gráficas, es decir, como pasar de datos recogidos de la vida cotidiana a una gráfica que nos permite analizar los datos de manera más sencilla. Este es uno de los métodos de describir el mundo, pero hay muchos más. Entre ellos está el expresar con una fórmula algebraica la relación entre dos o más variables. Al proceso de escribir en términos matemáticos los fenómenos de la naturaleza se le denomina **modelización**.

Veamos entonces cómo podemos transformar un fenómeno real en una fórmula matemática, es decir, encontrar la función expresada en términos matemáticos.

Alquilando un kayak:

Mariña y Roque van a alquilar un kayak para ir a dar una vuelta por la ría. El alquiler del Kayak es de 6 € la hora (6 €/h). ¿Cuál es la expresión matemática que nos relaciona el precio que tenemos que pagar y la cantidad de horas que alquilamos el kayak?

1. Leer el enunciado y deducir cuál es la variable dependiente y cual la independiente:
   - En este caso sabemos que el precio del kayak es fijo, así que no es ninguna variable.
   - El enunciado nos dice que tenemos que relacionar el precio que tenemos que pagar y la cantidad de horas que alquilamos el kayak. En este caso es bastante lógico pensar que dependiendo del tiempo que alquilemos el kayak, tendremos que pagar más o menos, por tanto, el precio depende del tiempo. Ya hemos encontrado nuestras dos variables:
     - Variable independiente (x): Tiempo que alquilamos el kayak
     - Variable dependiente (y): Precio total que pagamos
2. Investigar qué relación hay entre ambas variables y escribir la función que las relaciona:
   - El siguiente paso es buscar la relación que hay entre ambas variables. De momento tan solo hemos estudiado relaciones de proporcionalidad directa, pero existen muchas otras que estudiarás en cursos más avanzados (inversamente proporcionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas...).
   - Como hemos visto en el apartado 3.1 Proporcionalidad y porcentajes: "Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar (o dividir) una por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número." Veamos si esto se cumple en nuestro enunciado:

Si alquilo el kayak 1 hora, pagaré 6 €, si alquilo el kayak 2 horas, pagaré 12 €, y si alquilo el kayak 3 horas, pagaré 18 €, es decir son magnitudes directamente proporcionales, donde el precio total que pagamos se obtiene multiplicando el precio que cuesta alquilar el kayak 1 hora y el tiempo que alquilamos el kayak.

Si traducimos esta frase a lenguaje matemático quedará:

precio total =6 · *tiempo que alquilamos el kayak*

es decir: $y=6x$

Salando el pescado: Un método muy utilizado para conservar el pescado desde hace muchos siglos, es cubrirlo con sal. Para salar 1 Kg de pescado hacen falta 250 g de sal. Sabiendo este dato, ¿cómo podemos relacionar la cantidad de sal que nos hace falta para salar el pescado capturado en alta mar?

1. Leer el enunciado y deducir cuál es la variable dependiente y cual la independiente:
    - Según de la cantidad de pescado que capturemos necesitaremos más o menos cantidad de sal, es decir la sal que necesitaremos depende del pescado que capturemos. Por tanto:
        - Variable dependiente: cantidad de sal
        - Variable independiente: kilogramos de pescado.
2. Investigar qué relación hay entre ambas variables y escribir la función que las relaciona:
    - Si para 1 Kg de pescado necesitamos 250 gramos de sal, para 2 Kg necesitaremos 500 gramos, para 3 Kg, 750 g y así sucesivamente. Es una relación de proporcionalidad directa.
    - Si traducimos esta relación a una ecuación matemática, nos quedará:

Cantidad de sal = 250 · Kilogramos de pescado

es decir: $y=250x$

3.6. Funciones lineales

Ahora que ya conocemos cómo:

- saber si dos magnitudes tienen una relación de proporcionalidad directa
- representar puntos en el plano
- hacer tablas de datos
- representar gráficas
- hallar expresiones algebraicas de dos variables

Vamos a relacionarlo todo a través de un tipo de funciones que se llaman funciones lineales o funciones de proporcionalidad directa.

Tablas

En los ejercicios anteriores vimos cómo los datos de una función se representan en tablas. Si nos fijamos bien en esas tablas y las analizamos, veremos que todas tienen una característica común: representan funciones de proporcionalidad directa. Por tanto, podemos conocer su constante de proporcionalidad directa.

Veamos, como ejemplo, la tabla del precio de la sardina:

Precio de la sardina

x (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y (€)	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	40,5	45

Si dividimos cada pareja de valores, nos dará siempre la misma cantidad. En este caso:

$$\frac{4,5}{0,5}=\frac{9}{1}=\frac{13,5}{1,5}=\ldots=9$$

es decir, 9 sería la **constante de proporcionalidad.**

Gráficas

De todas las gráficas que hicimos hasta ahora, ¿hay algo que te llame la atención?

Efectivamente, **la forma de las gráficas son todas rectas ¡que pasan por el origen!**

Expresión algebráica

Volvamos a los ejemplos anteriores donde hallábamos la expresión algebraica entre dos magnitudes:

- En el problema del kayak, la fórmula era: y = 6x
- En la de salar el pescado era: y = 250x

Si repasas las de tus ejercicios verás que todas tienen la misma forma:

$$y=mx$$

La pendiente, m

La pendiente de una cuesta es la inclinación que tiene, ¿no? Pues, la pendiente de una recta no es más que la inclinación que tiene.

Como las gráficas de una función de proporcionalidad directa son rectas, tendrán una inclinación, que se llama pendiente y que corresponde con el parámetro "*m*" de la expresión *y* = *mx*.

A su vez, la pendiente también coincide con la constante de proporcionalidad directa que se calcula dividiendo los valores de la variable dependiente entre los valores de la variable independiente:

$$m=\frac{y}{x}$$

Resumimos

- Una función de proporcionalidad directa es aquella en la que sus magnitudes tienen una relación directamente proporcional.
- La gráfica de una función de proporcionalidad directa es siempre una recta que pasa por el orígen.
- Todas las funciones de proporcionalidad directa tienen la expresión: *y* = *mx*.
- El parámetro "*m*" indica la pendiente de la recta y coincide con la constante de proporcionalidad directa cuando hallamos la razón entre la variable dependiente, "*y*", y la variable independiente, "*x*". Se calcula como: $m=\frac{y}{x}$.