Funciones elementales

Índice

1. Introducción

Es conveniente, a parte de conocer las características de las funciones, saber esbozar su gráfica a partir de la expresión analítica. Para ellos se mostrarán algunos ejemplos de funciones típicas. El método para representar aproximadamente la gráfica de una función consta de 2 partes:

1. Reconocer el tipo de función de entre las estudiadas a partir de su ecuación.
2. Dar algunos valores para conocer los puntos importantes por donde pasa.

2. Funciones lineales y afines

2.1. Ecuaciones de funciones lineales y afines

Las funciones lineales y afines son aquellas en las que la x tiene grado 1. Ambas se representan como rectas cuyas ecuaciones son:

1. Función lineal: $f(x) = mx \to$ Recta que pasa por el origen
2. Función afín: $f(x) = mx + n \to$ Recta que NO pasa por el origen

Dos parámetros MUY IMPORTANTES a la hora de trabajar con funciones tanto lineales como afines son **la pendiente** y **la ordenada en el origen**:

La pendiente indica la **inclinación de la recta**, se denota por la letra **m** y en una función cuya ecuación es $f(x) = mx + n$ siempre coincide con **el coeficiente de la x**, es decir, el numerito que va delante de la x.

La ordenada en el origen, es el punto en el que la recta corta al eje OY, se denota por la letra **n** y en una función cuya ecuación es $f(x) = mx + n$ siempre coincide con **el término independiente**, es decir, el numerito que va sin x.

Ejemplo:

$$f(x) = 3x - 5$$

Función afín.
La pendiente de esta recta es 3.
La ordenada en el origen es n=-5, es decir, corta al eje de las x en el punto $(0, -5)$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{3}x$$

Función lineal.
La pendiente de esta recta es 1/3.
La ordenada en el origen es n=0, es decir, corta al eje de las x en el punto $(0, 0)$.

La pendiente de una recta nos dice también si es creciente o decreciente:

- Si la pendiente es positiva, la recta es creciente
- Si la pendiente es negativa, la recta es decreciente

2.2. Ejemplo de representación

Para representar una recta es suficiente con calcular sus puntos de corte, o cualquier otro punto que nos de una visión clara del camino que seguirá.

Ejemplo: Representación de $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

Calculamos los puntos de corte:

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x - 1 \rightarrow$ Punto $(3/2, 0)$

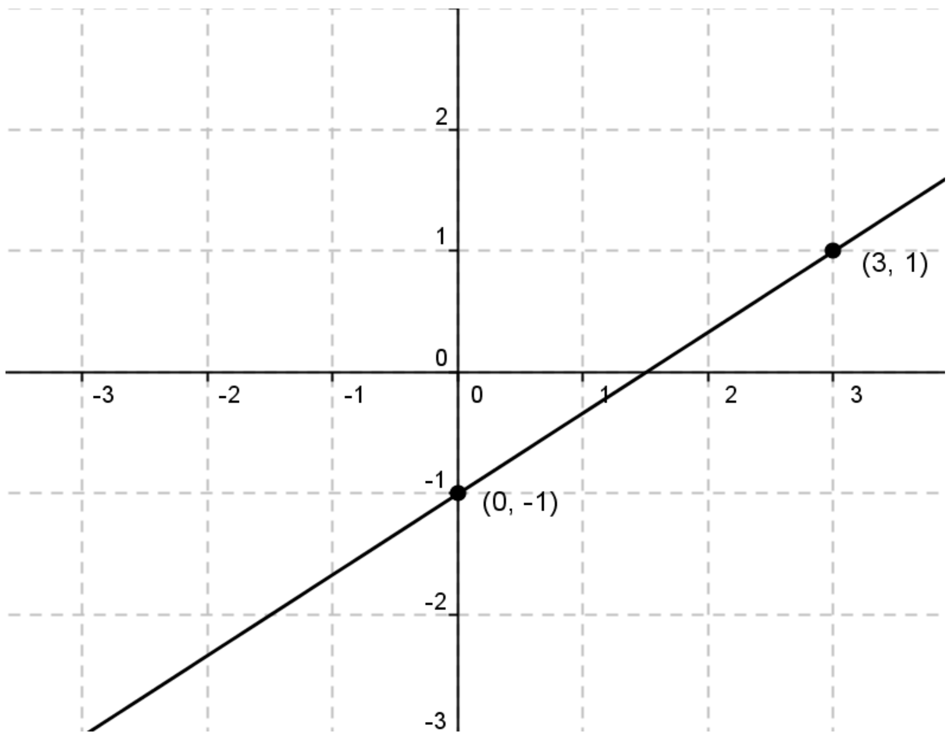
Eje OY: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

El punto $(0, 3/2)$ puede no ser tan fácil de representar como un valor entero, por ello, si queremos, para asegurar una representación correcta, podemos tomar otro punto que de un valor entero, en este caso cualquier candidato será un múltiplo de 3, por ejemplo el 3:

Otro punto: $x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = 1 \rightarrow$ Punto (3,1)

Representamos en los ejes los puntos obtenidos (con 2 es suficiente) y los unimos:

x	$f(x)$	Punto
3/2	0	(3/2,0)
0	-1	(0,-1)
3	1	(3,1)



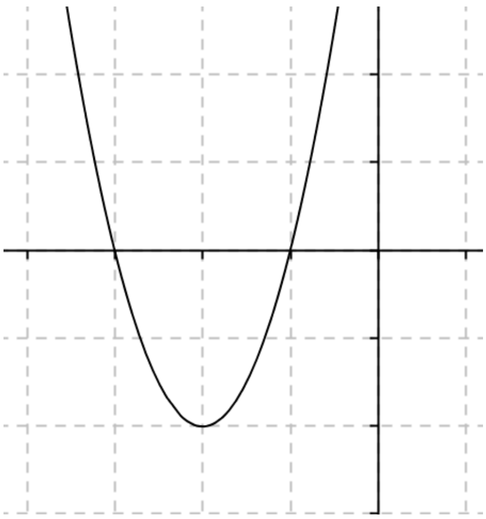
3. Funciones parabólicas

3.1. Ecuación de una parábola

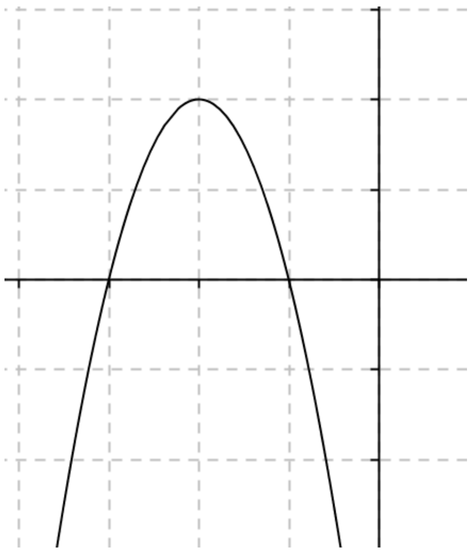
Una parábola es una función construida a partir de un polinomio de grado 2, es decir, su ecuación es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

3.2. Forma de la gráfica



$a > 0$



$a < 0$

Estudiando el parámetro a y el vértice de la gráfica, podemos conocer cuándo la función es creciente o decreciente. Así:

- Para una función donde a es mayor que 0, la función decrece hasta el vértice y crece a partir del vértice.
- Para una función donde a es menor que 0, la función crece hasta el vértice y decrece a partir del vértice.

3.3. Ejemplo de representación

Para representar una parábola son necesarios como mínimo 4 puntos: **los puntos de corte** y **el vértice**.

Ejemplo: Representación de: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Calculamos los puntos de corte:

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = f(x) = x^2 - 6x + 5 \rightarrow$ Puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 5 \rightarrow$ Punto $(0, 5)$

Calculamos el vértice V, que será un punto con coordenadas (V_x, V_y), donde V_x puede calcularse según la expresión:

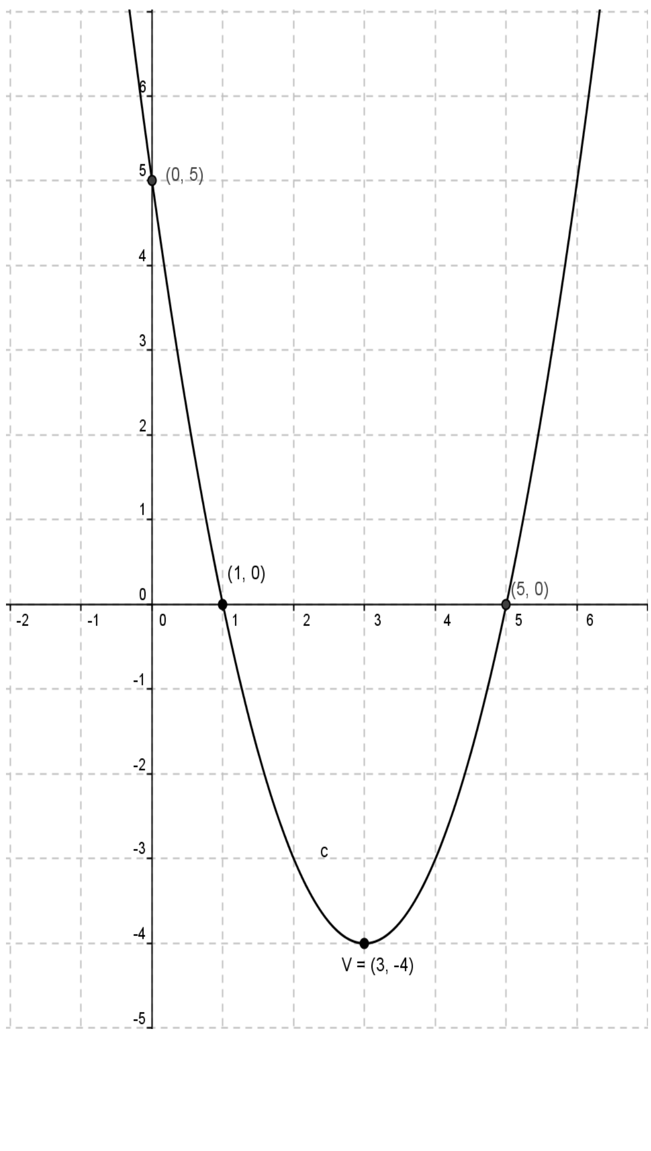
$$\boxed{V_x = \frac{-b}{2a}}$$

En nuestro ejemplo: $V_x = \dfrac{6}{2 \cdot 1} = 3$

La coordenada V_y se calcula **sustituyendo el valor de V_x en la función**.

En nuestro ejemplo: $V_y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

x	$f(x)$	Punto
1	0	(1,0)
5	0	(5,0)
0	5	(0,5)
3	-4	(3,-4) $\rightarrow$ Vértice



4. Funciones de proporcionalidad inversa

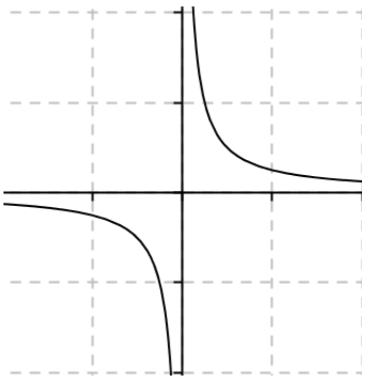
4.1. Ecuación de funciones de proporcionalidad inversa

Una función de proporcionalidad inversa tiene como ecuación:

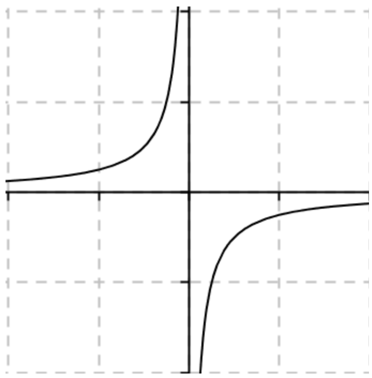
$$f(x) = \frac{k}{x}$$

4.2. Forma de la gráfica

Dependiendo del parámetro k, la gráfica de una función de proporcionalidad inversa será:



$k > 0$



$k < 0$

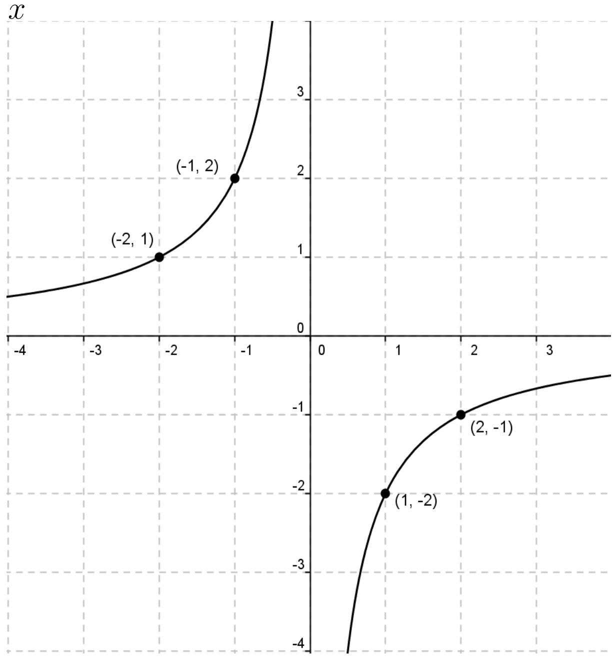
4.3. Ejemplo de representación

Para representar una función de proporcionalidad inversa es conveniente dar al menos 4 puntos: 2 positivos y 2 negativos.

Nunca se dará un punto que no está en el dominio.

Ejemplo de representación: $f(x) = \dfrac{-2}{x}$

x	$f(x) = \dfrac{-2}{x}$	Punto
1	$\dfrac{-2}{1} = -2$	$(1, -2)$
-1	$\dfrac{-2}{-1} = 2$	$(-1, 2)$
2	$\dfrac{-2}{2} = -1$	$(2, -1)$
-2	$\dfrac{-2}{-2} = 1$	$(-2, 1)$



5. Funciones exponenciales

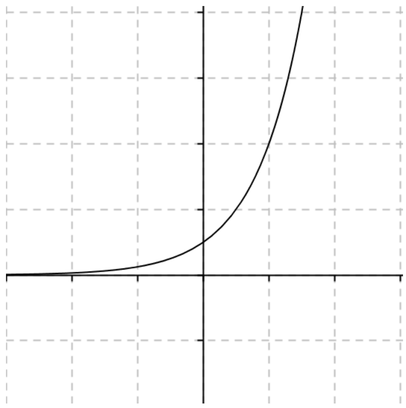
5.1. Ecuación de funciones exponenciales

Una función exponencial tiene como ecuación:

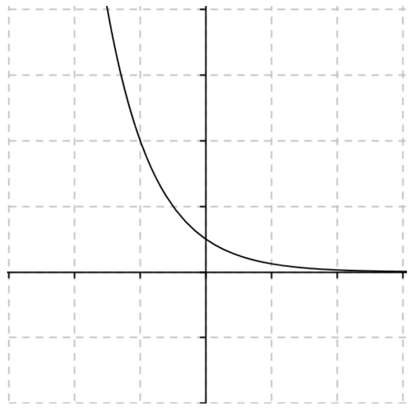
$$f(x) = a^x$$

5.2. Forma de la gráfica

Dependiendo de la base a, la gráfica de una función exponencial será:



$a > 0$



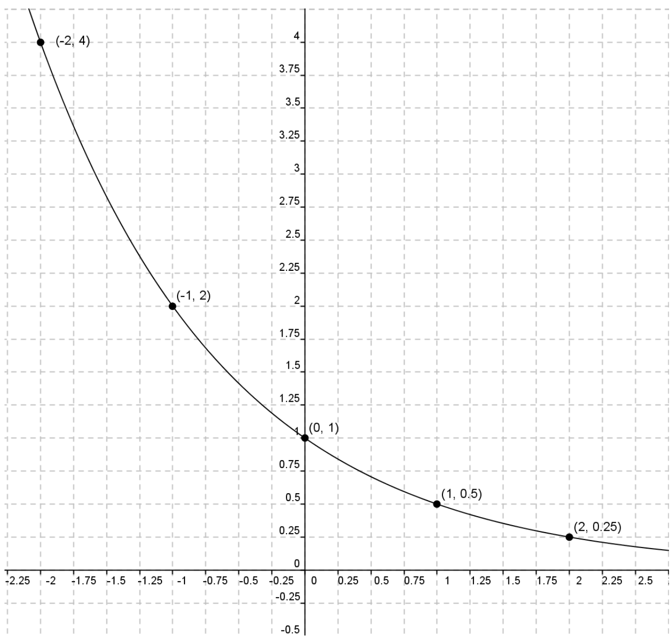
$a < 0$

5.3. Ejemplo de representación

Para representar una función exponencial hace falta dar 5 puntos como mínimo el 0, 2 positivos y 2 negativos.

Ejemplo de representación: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = \frac{1^x}{2}$	Punto
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5$	$(1, 1/2)$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1} = 2$	$(1, 2)$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$	$(1, 1/4)$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{1} = 4$	$(1, 4)$



6. Funciones logarítmicas

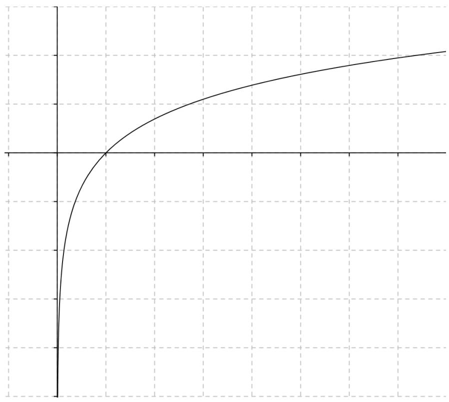
6.1. Ecuación de funciones logarítmicas

Una función logarítmica tiene como ecuación:

$$f(x) = \log_b x$$

6.2. Forma de la gráfica

La gráfica de una función logarítmica será:

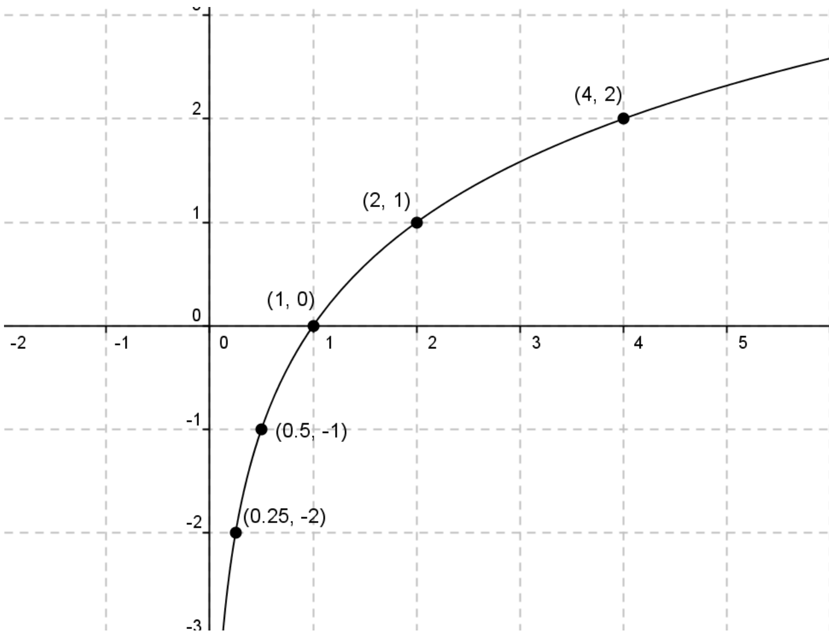


6.3. Ejemplo de representación

Para representar una función logarítmica hace falta dar 5 puntos como mínimo el 1, 2 positivo y 2 negativo, y que siempre sean potencias de la base.

Ejemplo de representación: $f(x) = \log_2 x$

x	$f(x) = \log_2 x$	Punto
1	$\log_2 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$\log_2 2 = 1$	$(2, 1)$
4	$\log_2 4 = 2$	$(4, 2)$
2^{-1}	$\log_2 2^{-1} = -1$	$(1/2, -1)$
2^{-2}	$\log_2 2^{-2} = -2$	$(1/4, 0)$



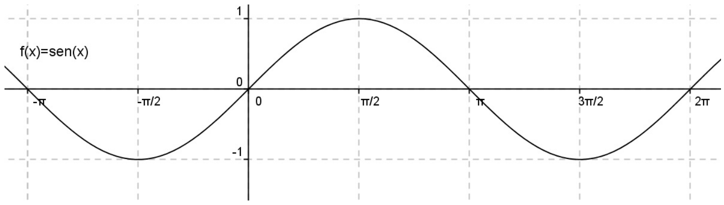
7. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son aquellas en las que está presente alguna razón trigonométrica. Son funciones periódicas ($T = 2\pi$ rad o 360^o) y su representación se realiza dando valores entre 0 y 360^o (o bien 0 y 2π rad), ya que a partir de ahí, los valores se repiten.

7.1. La función $sen(x)$

Ejemplo de representación: $sen(x)$

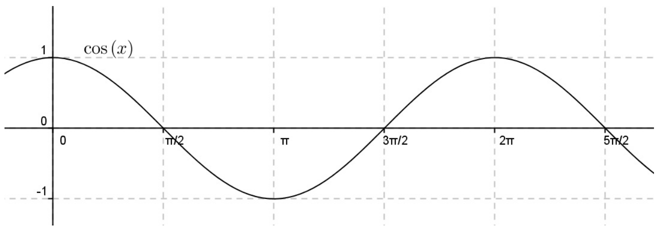
x	$f(x) = sen(x)$	Punto
0^o	$sen(0^o) = 0$	$(0^o, 0)$
90^o	$sen(90^o) = 1$	$(90^o, 1)$
180^o	$sen(180^o) = 0$	$(180^o, 0)$
270^o	$sen(270^o) = -1$	$(270^o, -1)$
360^o	$sen(360^o) = 0$	$(360, 0)$



7.2. La función $cos(x)$

Ejemplo de representación: $cos(x)$

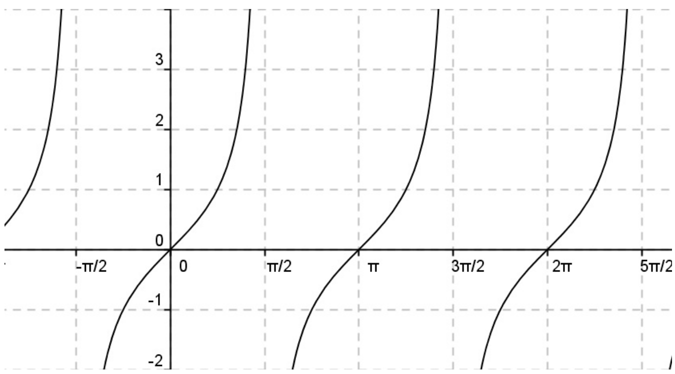
x	$f(x) = cos(x)$	Punto
0^o	$cos(0^o) = 1$	$(0^o, 1)$
90^o	$cos(90^o) = 0$	$(90^o, 0)$
180^o	$cos(180^o) = -1$	$(180^o, -1)$
270^o	$cos(270^o) = 0$	$(270^o, 0)$
360^o	$cos(360^o) = 1$	$(360, 1)$



7.3. La función $tan(x)$

Ejemplo de representación: $tan(x)$

x	$f(x) = tan(x)$	Punto
0^o	$tan(0^o) = 0$	$(0^o, 0)$
90^o	$tan(90^o) = \infty$	$(90^o, \text{Asíntota})$
180^o	$tan(180^o) = 0$	$(180^o, 0)$
270^o	$tan(270^o) = -\infty$	$(270^o, \text{Asíntota})$
360^o	$tan(360^o) = 1$	$(360, 0)$



8. Funciones definidas a trozos

Las funciones definidas a trozos son funciones que dependiendo del valor que le demos a la x obedecen a una expresión matemática u otra, por tanto no tienen un modelo de gráfica, pero aún así hay pautas a seguir para su representación:

8.1. Ejemplo de representación de una función definida a trozos

Para representar una función definida a trozos es conveniente representar como mínimo 2 puntos, para cada intervalo, que son precisamente los puntos en los que la función cambia.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2-5 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ -x+4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

El primer *trocito* lo tenemos para los valores menores que -1, así que construimos la tabla con los valores menores que -1. Como es una recta, con 2 puntos es suficiente y uno de ellos tiene que ser OBLIGATORIAMENTE el -1:

x	$f(x) = x-3$	Punto
-1	$-1-3=-4$	$(-1,-4)$
-2	$-2-3=-5$	$(-2,-5)$

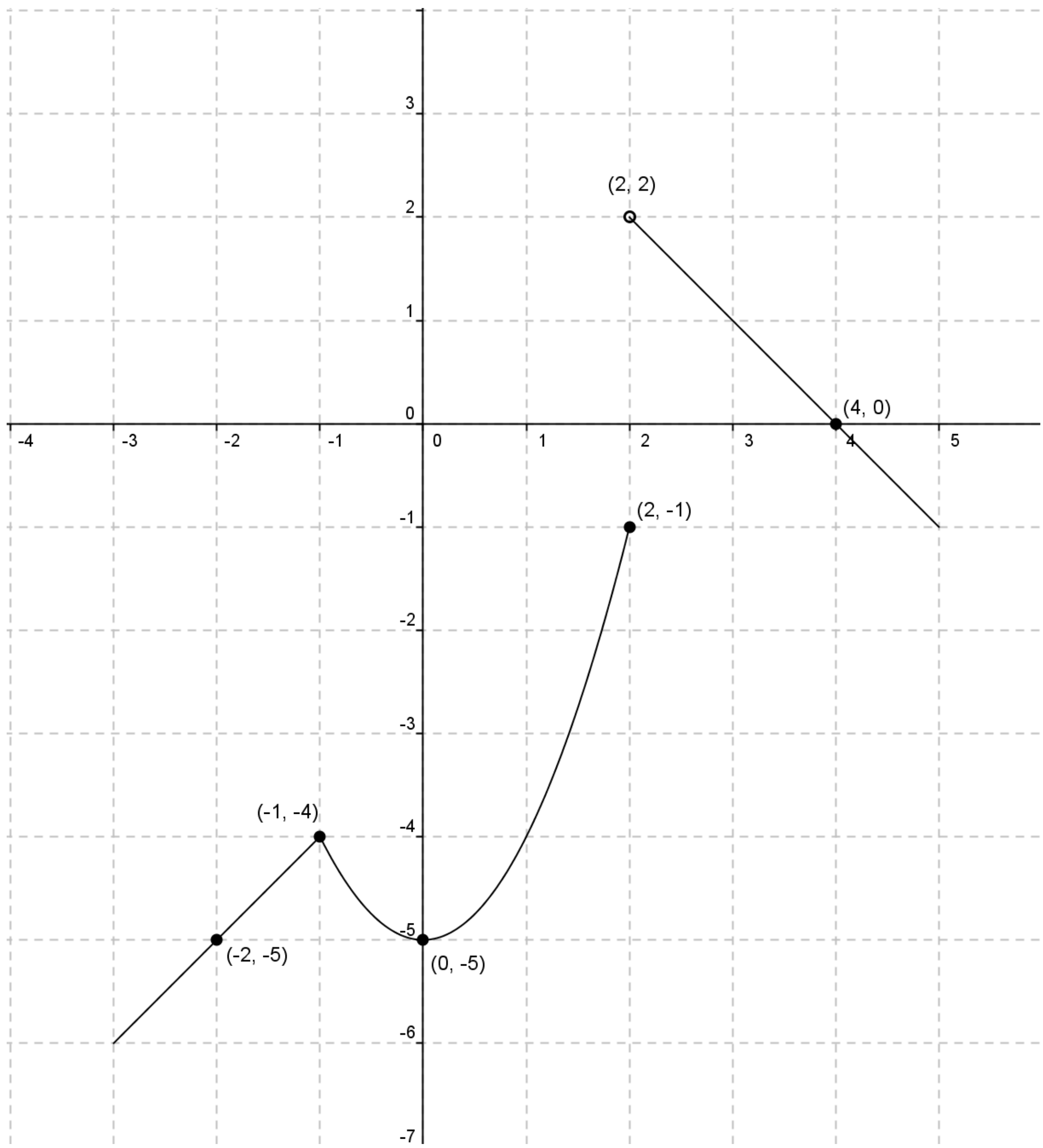
Seguimos con el siguiente *trocito*, tenemos que darle valores entre -1 y 2, pero como es una parábola deberíamos calcular también el vértice que se encuentra en el punto $x = 0$. Ponemos en la tabla los valores: -1, 0 y 2:

x	$f(x) = x^2-5$	Punto
-1	$(-1)^2-5=-4$	$(-1,-4)$
0	$0^2-5=-5$	$(0,-5)$
2	$(2)^2-5=-1$	$(-2,-1)$

Por último tenemos otra recta para la que habrá que darle los valores 2 y otro más que elijamos mayor que 2

x	$f(x) = -x + 4$	Punto
2	$-2 + 4 = -2$	$(2, -2)$
4	$4 - 4 = 0$	$(4, 0)$

Representamos gráficamente los puntos:



9. Ejercicios

1. Representa las rectas:

   a) $y = 3x$
   b) $y = -2x$
   c) $y = -\dfrac{x}{2}$
   d) $y = -2$
   e) $y = 0{,}8x$
   f) $y = 1{,}6x$
   g) $y = \dfrac{6}{7}x$

2. Representa los siguientes pares de rectas y calcula gráficamente su punto de corte: NOTA: Cada par de rectas se representará en un mismo eje.

   a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = 7 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} y = 2 - 5x \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

3. Escribe la ecuación de las rectas siguientes de las que conocemos un punto y su pendiente. Represéntalas

   a) $P(-3, 5)$, $m = 2$
   b) $P = (1, 4)$, $m = -3$
   c) $P = (-8, 2)$, $m = \dfrac{2}{5}$
   d) $P = (-7, -9)$, $m = \dfrac{-7}{3}$

4. Representa y estudia las siguientes parábolas

   a) $f(x) = x^2 - 6x - 16$
   b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
   c) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
   d) $f(x) = x^2$
   e) $f(x) = 3x^2$
   f) $f(x) = x^2 - 3$
   g) $f(x) = (x - 1)^2$
   h) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

5. Analiza y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{-3}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

f) $f(x) = -4x^{-1}$

6. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales:

   a) $f(x) = 2^x$

   b) $f(x) = (0,25)^x$

   c) $f(x) = 3^x$

   d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

7. Representa gráficamente las siguientes funciones logarítmicas:

   a) $f(x) = \log_{10} x$

   b) $f(x) = \log_3 x$

   c) $f(x) = \log_4 x$

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3sen(x)$

   b) $f(x) = 2cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   c) $f(x) = tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos.

   a)

$$f(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x \leq 2; \\ x^2 - 6x + 10 & si \quad 2 < x < 5; \\ 4x - 15 & si \quad x \geq 5. \end{cases}$$

   b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad x < 1; \\ x^2 - 3x & si \quad x \geq 1. \end{cases}$$

   c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{x^2} & si \quad x < -1; \\ \\ x^2 - 3x - 1 & si \quad x > -1. \end{cases}$$

   d)

$$f(x) = |x + 2|$$