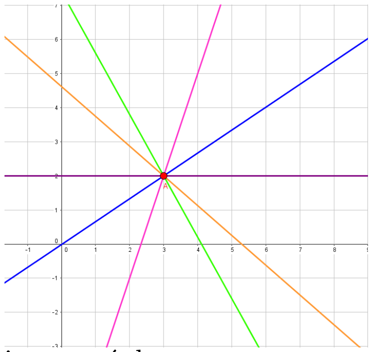
# La Recta

## Índice

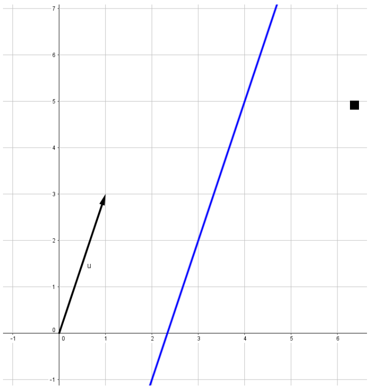
## 1. Introducción

Una recta es un lugar geométrico en el cual todos los puntos van en la misma dirección. Es decir, lo que de toda la vida llamamos “una raya”.

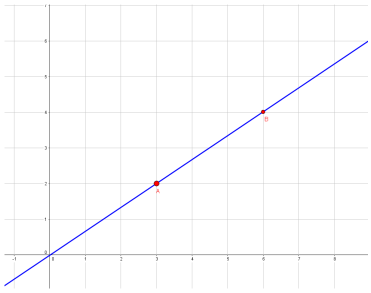


Pues bien, ahora resulta que tengo el capricho de que dibujes una recta. Y tu dirás... ¡¡Uff!!, vale, pero.. ¿cual? porque hay muchas, muchas... muchas. Por poder, puedes dibujar miles, millones, trillones, miles de millones de trillones de rectas distintas...

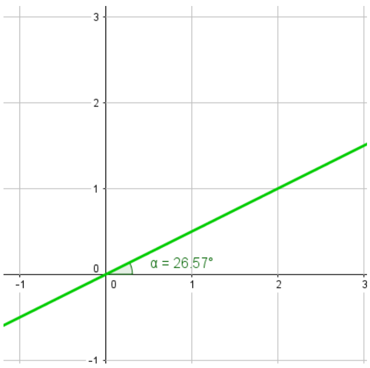
Pero yo quiero que dibujes la que yo te diga, no me vale una cualquiera ¿qué datos te tengo que dar? Pues bien, para definir una recta podemos usar:



- Un **punto** que nos dice por donde pasa y un **vector** que nos indica su dirección. ¡¡Las dos cosas!! Porque si nos dicen solo un vector, puedo dibujar mogollón de rectas, y si nos dicen tan solo un punto puedo dibujar “outro feixe delas”, así que necesito un punto y vector, de esta manera, solo una recta cumplirá las dos condiciones.



- **Dos puntos**. El que me dibuje dos rectas distintas que pasen por los mismos dos puntos, se lleva una baticao de regalo.




- Un **punto** que nos dice por donde pasa y el **ángulo o la pendiente** que forma con algún eje de coordenadas. Sigo con la baticao en promoción para el que consiga dibujar dos rectas distintas que pasen por el mismo punto y tengan la misma pendiente o formen el mismo ángulo con algún eje de coordenadas.

Todas estas condiciones,cuando tenemos que hallar la ecuación de la recta, se resumen en una que: es encontrar **SIEMPRE**

**un PUNTO y la PENDIENTE**

## 2. Ecuaciones de la recta

La ecuación de la recta es una expresión matemática que nos indica las coordenadas $x$ e $y$ de todos los puntos que pasan por esa recta. Usamos una expresión matemática, porque si los tuviéramos que escribir todos, no acabaríamos en la vida.

Hay varios tipos de ecuaciones de la recta, en función de los datos que nos den usaremos unas u otras.

Vamos a aprender a calcularlas teniendo en cuenta que $(x, y)$ son las coordenadas de los puntos de la recta, $P = (x_0, y_0)$ es el punto por el que pasa la recta y $\vec{v} = (v_x, v_y)$ es el vector director.

$$(x, y) = P + \lambda\vec{v}$$
$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(v_x, v_y) \Longrightarrow \boxed{\text{Ecuación vectorial}}$$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (\lambda \cdot v_x \ , \ \lambda \cdot v_y)$$
$$(x, y) = (x_0 + \lambda \cdot v_x \ , \ y_0 + \lambda \cdot v_y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \cdot v_x \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_y \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{\text{Ecuaciones paramétricas}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x - x_0}{v_x} = \lambda \\ \\ \dfrac{y - y_0}{v_y} = \lambda \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \Longrightarrow \boxed{\text{Ecuación contínua}}$$

$$v_y(x - x_0) = v_x(y - y_0)$$
$$v_y \cdot x - v_y \cdot x_0 = v_x \cdot y - v_x \cdot y_0$$

$$\underbrace{v_y}_{A} \cdot x \underbrace{-v_x}_{B} \cdot y + \underbrace{v_x \cdot y_0 - v_y \cdot x_0}_{C} = 0$$

$$Ax + By + C = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{Ecuación general}}$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

$$y = m \cdot x + n \Longrightarrow \boxed{\text{Ecuación explícita}}$$

***Ejercicio:*** *Indica un punto y un vector en las siguientes rectas:*

a) $\dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 1}{2}$

b) $(x, y) = (-4, 4) + \lambda(2, 5)$

c) $\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{array} \right.$

Veamos ahora un ejemplo del cálculo de las ecuaciones de la recta

**Ejemplo**: Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(-4,5)$

$$(x,y)=P+\lambda\vec{v}$$
$$(x,y)=(2,3)+\lambda(-4,5)\Longrightarrow\boxed{\text{Ecuación vectorial}}$$

$$(x,y)=(2,3)+(-4\lambda\ ,\ 5\lambda)$$
$$(x,y)=(2-4\lambda\ ,\ 3+5\lambda)$$

$$\begin{cases} x=2-4\lambda \\ y=3+5\lambda \end{cases}\Longrightarrow\boxed{\text{Ecuaciones paramétricas}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-4}=\lambda \\ \\ \dfrac{y-3}{5}=\lambda \end{cases}\Rightarrow\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{5}\Longrightarrow\boxed{\text{Ecuación continua}}$$

$$5(x-2)=-4(y-3)$$
$$5x-10=-4y+12$$

$$5x+4y-22=0\Longrightarrow\boxed{\text{Ecuación general}}$$

$$y=-\frac{5}{4}x+\frac{22}{4}\Longrightarrow\boxed{\text{Ecuación explícita}}$$

***Ejercicio:*** *Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(-1,2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(3,6)$*

***Ejercicio:*** *Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $P(-1,-1)$ *y el punto* $Q(-2,3)$. *Indica también su pendiente y representa gráficamente la recta*

## 3. La pendiente

La pendiente , denotada normalmente como $m$, es una parte muuuuy importante de la recta. Nos indica la inclinación que tiene, de manera que si tenemos una recta con **pendiente positiva**, la recta será **creciente** y una recta con **pendiente negativa** será **decreciente**. Hay muchas maneras de calcular la pendiente de una recta. Veamos las más comunes:

- La pendiente es **el numerito que va delante de la** $x$ **en la <u>ecuación explícita</u>**.

  **Ejemplo**: Calcula la pendiente de la recta: $y = 3x + 2 \Longrightarrow$ La pendiente es 3

- La pendiente de una recta, también es **la pendiente de su vector director**, y se calculan como:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vector director: } \vec{v} = (v_x, v_y) \\ \text{Pendiente de la recta: } m\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{m = \frac{v_y}{v_x}}$$

  **Ejemplo**: Calcula la pendiente de la recta $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-3}{5}$

  Vector director: $(-4, 5) \Longrightarrow m = -\dfrac{5}{4}$

- La pendiente es **la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X**:

$$\boxed{m = tan(\alpha)}$$

***Ejercicio:*** *Indica el vector director y la pendiente de las siguientes rectas:*

a) $2x - 3y + 5 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{array}\right\}$

c) La recta que pasa por el punto $(0, 0)$ y forma un ángulo de $45°$ con el eje X (Bisectriz del $1°$ y $3^{er}$ cuadrante)

d) $(x, y) = (3, -2) + \lambda(4, 1)$

e) $y = \dfrac{-4x + 5}{3}$

## 4. Ecuación punto pendiente

Existe otra ecuación más que nos permite llegar a la ecuación explícita sin tener que hacer tanto cálculo rollo: La ecuación punto pendiente. Para ello nos hace falta **un punto** $(x_0, y_0)$ **y la pendiente** $m$ Su fórmula es:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

**Ejemplo**: Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}(2, -4)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punto} = (-1,3) \\ \vec{v} = (2,-4) \Longrightarrow m = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (y-3) = -2(x+1)$$

***Ejercicio:*** *Calcula la ecuación punto pendiente y explícita de las siguientes rectas con los datos que se dan:*

a) $P(1, 0)$ y $m = 3$

b) $P(2, 2)$ y $\overrightarrow{v} = (2, 5)$

c) $P(4, 3)$ y $m = \dfrac{1}{2}$

d) $P(-1, -4)$ y $m = \dfrac{3}{5}$

e) $A(0, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (-2, 4)$

## 5. Posición relativa de rectas

Dos rectas pueden ser entre sí:

- **Paralelas**: Tienen la misma inclinación (es decir, la misma pendiente): $\boxed{m_r = m_s}$

> ***Ejemplo:*** *Indica la posición relativa de las rectas:*$r: 2x - 3y + 4 = 0$ *y* $s: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2}$
>
> $$\left.\begin{array}{l} r: 2x - 3y + 4 = 0 \\[2ex] s: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow m_r = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \Longrightarrow m_s = \dfrac{2}{3} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\[2ex] b \end{array}}\right\} \Longrightarrow m_r = m_s$$
>
> Como las pendientes son iguales, las rectas son **paralelas**.

- **Perpendiculares**: Forman entre sí un ángulo de 90º (las pendientes son inversas y opuestas): $\boxed{m_r = -\dfrac{1}{m_s}}$

> ***Ejemplo:*** *Indica la posición relativa de las rectas:*$r: 5x + 4y - 10 = 0$ *y* $s: (y-2) = \dfrac{4}{5}(x+4)$
>
> $$\left.\begin{array}{l} r: 5x + 4y - 10 = 0 \\[2ex] s: (y-2) = \dfrac{4}{5}(x+4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow m_r = -\dfrac{5}{4} \\[2ex] \Longrightarrow m_s = \dfrac{4}{5} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\[2ex] b \end{array}}\right\} \Longrightarrow m_r = -\dfrac{1}{m_s}$$
>
> Como las pendientes son inversas y opuestas, las rectas son **perpendiculares**.

- **Secantes**: Tienen distintas pendientes: $\boxed{m_r \neq m_s}$

> ***Ejemplo:*** *Indica la posición relativa de las rectas:*$r: -x + y = 0$ *y* $s: 2x + y - 5 = 0$
>
> $$\left.\begin{array}{l} r: -x + y = 0 \\[2ex] s: 2x + y - 5 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow m_r = 1 \\[2ex] \Longrightarrow m_s = -2 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\[2ex] b \end{array}}\right\} \Longrightarrow m_r \neq m_s$$
>
> Como las pendientes son distintas, las rectas son **secantes**.

- **Coincidentes**: Tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen (es decir, son la misma recta).

> ***Ejemplo:*** *Indica la posición relativa de las rectas:*$r: -2x + 4y - 10 = 0$ *y* $s: -x + 2y - 5 = 0$
>
> $$\left.\begin{array}{l} r: -2x + 4y - 10 = 0 \\[2ex] s: -x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow m_r = \dfrac{4}{2} = 2 n_r = \dfrac{10}{2} = 5 \\[2ex] \Longrightarrow m_s = 2 n: s = 5 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\[2ex] b \end{array}}\right\} \Longrightarrow m_r \neq m_s$$
>
> Como las pendientes y las ordenadas en el origen son iguales, las rectas son **secantes**.

***Ejercicio:*** *Dadas las rectas:*

a) $2x + 3y - 4 = 0$

b) $x - 2y + 1 = 0$

c) $3x - 2y - 9 = 0$

d) $4x + 6y - 8 = 0$

e) $2x - 4y - 6 = 0$

f) $2x + 3y + 9 = 0$

*Indica sus posiciones relativas.*

***Ejercicio:*** *Estudia la posición relativa de las rectas:* $r \equiv 4x + 2y - 5 = 0$ *y* $s \equiv \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2}$

***Ejercicio:*** *Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,3) y es perpendicular a la de ecuación* $r \equiv 3x + 5y - 7 = 0$

***Ejercicio:*** *Calcula la ecuación de la recta que paralela a* $y = 2x + 3$ *que pasa por el punto* $A(2,3)$