Ecuaciones y sistemas

Índice

1. Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones bicuadradas son un tipo muy particular de ecuaciones cuyos exponentes son TODOS **múltiplos de 2**: Ejemplo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Estas ecuaciones de grado 4 tienen como máximo 4 soluciones y se calculan mediante una técnica llamada **cambio de variable** Veamos cómo se resuelven con un ejemplo:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Lo primero que hay que hacer es un **cambio de variable**:

$$x^2 = t$$

Reescribimos la ecuación con la nueva variable:

$$t^2 - 5t - 36 = 0$$

Resolvemos la ecuación

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 146}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \qquad\qquad t_2 = \frac{5-13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

OJO!!!! Este es el valor de t, pero nosotros tenemos que calcular el valor de x, de manera que tenemos que **deshacer el cambio**

$$x^2 = t$$

$$x = t_1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \begin{cases} x_1 = -3 \\ \\ x_2 = +3 \end{cases}$$

$$x = t_2 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

***Ejercicio**: Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:*

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ *Solución:* $x_1 = -3$; $x_2 = +3$; $x_3 = -1/2$; $x_4 = 1/2$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ *Solución:* $x_1 = -3$; $x_2 = +3$; $x_3 = -2$; $x_4 = +2$

c) $2x^4 - 16x^2 - 18 = 0$ *Solución:* $x_1 = -3$; $x_2 = +3$

d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ *Solución:* $x_1 = -1$; $x_2 = +1$; $x_3 = -3$; $x_4 = +3$

2. Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita dentro de una raíz. Para resolverlas hay que seguir los siguientes pasos:

1. Dejar la raíz con su coeficiente solito a un lado de la igualdad
2. Elevar los dos miembros de la ecuación al cuadrado
3. Resolver la ecuación
4. Comprobar los resultados

Veámoslo con un ejemplo:

$$4 = 2\sqrt{x+4} - 5x$$
$$5x + 4 = 2\sqrt{x+4}$$

$$(5x+4)^2 = (2\sqrt{x+4}))^2$$

$$25x^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4 + 16 = 4 \cdot (x+4)$$
$$25x^2 + 40x + 16 = 4x + 16$$

$$25x^2 + 40x = 4x$$

$$25x^2 + 40x - 4x = 0$$

$$25x^2 + 36x = 0$$

$$x \cdot (25x + 36) = 0$$

$$\boxed{\text{x=0}}$$
$$(25x+36) = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{36}{25}}$$

Ejercicio: *Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:*

a) $\sqrt{x} = 6 - x$ *Solución:* $x = 4$

b) $\sqrt{5x+4} = 2x + 1$ *Solución:* $x = 1$

c) $2\sqrt{x+5} + 10 = x$ *Solución:* $x = 20$

d) $\sqrt{x} + 2 = x$ *Solución:* $x = 4$

e) $\sqrt{2x-3} + 1 = x$ *Solución:* $x = 2$

f) $\sqrt{x+1} + 4 = 2x$ *Solución:* $x = 3$

g) $x + \sqrt{2x-3} = 1$ *Solución: No tiene*

3. Ecuaciones de la forma $(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)=0$

Cuando tenemos muchas cosas multiplicando e igualadas a 0

NO HACE FALTA HACER TODAS ESAS MULTIPLICACIONES INFERNALES!!!!.

Basta con aplicar la propiedad que mencionamos anteriormente: Para que esta ecuación tenga solución basta que alguno de los factores sea 0, así que la ecuación se nos convierte en tantas ecuaciones como productos haya y los hacemos por separado. Ejemplo:

$$(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x+4/3)=0$$

$$\begin{cases} (x-3)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=3}} \\ \\ (x+2)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=-2}} \\ \\ (x+4/3)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=-4/3}} \end{cases}$$

Ejercicio: *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $(x-3)(x^2-4)(x+6)=0$ *Solución:* $x_1=3$; $x_2=2$; $x_3=-2$; $x_4=-6$

b) $x(2x-5)(x-11)=0$ *Solución:* $x_1=0$; $x_2=5/2$; $x_3=11$

c) $(x+2)(x-2)(x+7)=0$ *Solución:* $x_1=-2$; $x_2=+2$; $x_3=-7$

d) $x(x-1)=0$ *Solución:* $x_1=0$; $x_2=1$

4. Ecuaciones de grado mayor que 2

Para resolver una ecuación de grado mayor que 2 tan solo hay que FACTORIZAR el polinomio, para ello recordemos los pasos a seguir:

1. Sacar factor común
2. Ver si es una identidad notable
3. Si el polinomio resultante es de segundo grado, resolver la ecuación de segundo grado
4. Si el polinomio NO es de segundo grado, aplicar el teorema de Ruffini

Una vez factorizado el polinomio la ecuación se resuelve como las de la forma: $(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)=0$

Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^4+2x^3-x^2-2x=0$$

Primero factorizamos el polinomio $x^4+2x^3-x^2-2x$ **sacando factor común**

$$x^4+2x^3-x^2-2x=x\cdot(x^3+2x^2-x-2)$$

Aplicamos Ruffini al polinomio x^3+2x^2-x-2 y nos da $(x-1)(x+1)(x+2)$

Resolvemos la ecuación:$x(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=0}} \\ (x-1)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=1}} \\ (x+1)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=-1}} \\ (x+2)=0 \Rightarrow \boxed{\text{x=-2}} \end{cases}$$

***Ejercicio**: Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:*

a) $x^3-6x^2-27x=0$ *Solución:* $x_1=-3$; $x_2=0$; $x_3=9$

b) $2x^4-5x^3+5x-2=0$ *Solución:* $x_1=-3$; $x_2=1/2$; $x_3=1; x_4=2$

5. Sistemas de ecuaciones lineales de más de 2 incógnitas

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de más de 2 incógnitas aplicamos los mismos métodos que para resolver los sistemas de ecuaciones de 2 incógnitas, aunque el método más sencillo y utilizado para resolverlos es el de **sustitución**. Vamos a ver con un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y+2z=7 \\ x-y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} z=y-x \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \\ x+2y+2(y-x)=7 \\ x-y-(y-x)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2y-2x=7 \\ x-y-y+x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+4y=7 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4y-7 \\ 2(4y-7)-2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 8y-14-2y=-2 \\ 6y=14+2 \\ 6y=12 \Rightarrow y=\dfrac{12}{6} \Rightarrow \boxed{y=2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=4y-7 \Rightarrow x=4\cdot(2)-7 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ z=y-z \Rightarrow z=2-1 \Rightarrow \boxed{z=1} \\ x-y-z=-2 \end{array}$$

6. Sistemas de ecuaciones no lineales

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos que no solo tienen operaciones de suma y multiplicación, sino que también incluyen potencias y multiplicación de variables. Todos ellos se resuelven por cualquiera de los métodos tradicionales, aunque el más sencillo suele ser **sustitución** eligiendo la variable más fácil para despejar. Ahora, ejemplitos:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y=4 \\ \\ 2x-y=1 \Rightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x^2-(2x-1)=4 \\ \qquad \nearrow \\ y=2x-1 \end{array}\right. \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=3 \\ \\ x_2=-1 \end{array}\right.$$

Calculamos ahora la y, sustituyendo los valores de x hallados en la ecuación $y=2x-1$, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=3 \Rightarrow y_1=2\cdot3-1=5 \\ \\ x_2=-1 \Rightarrow y_2=2\cdot(-1)-1=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=3, y_1=5 \\ \\ x_2=-1, y_2=-3 \end{array}\right.$$

Otro ejemplito, pero este por reducción

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=10 \\ \\ x^2-y^2=8 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} x^2 & + & \cancel{y^2} & = & 10 \\ x^2 & - & \cancel{y^2} & = & 8 \\ \hline 2x^2 & & & = & 18 \end{array} \Rightarrow x^2=\frac{18}{2}=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

Calculamos la y por sustitución:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=-3 \Rightarrow 3^2+y^2=10 \Rightarrow y^2=10-9 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \\ \\ x_1=3 \Rightarrow (-3)^2+y^2=10 \Rightarrow y^2=10-9 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-3 \Rightarrow y_1=-1 \\ \\ x_3=-3 \Rightarrow y_3=1 \\ \\ x_2=3 \Rightarrow y_2=-1 \\ \\ x_4=3 \Rightarrow y_4=-1 \end{array}\right.$$

7. Consejillos y truquitos

Cuando hay que resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones y no se especifica un método concreto para resolverlo, es conveniente que se piense primero antes de ponerse a calcular como locos. Y ahora os preguntaréis: *"¿pensar? ¿cómo? ¿en qué? ¡¡profeeee, las matemáticas no se estudian!!"*. No se chapan, pero sí se piensan. Sí, sí, se piensa en el método que hace que os salgan más fáciles las cuentas y acabéis antes. Así que PENSAD antes de poneros a calcular como locos y ahorraréis muuucho tiempo y muuucho trabajo. De todas formas, os dejo una tabla de truquitos, para que os sea más fácil poner las ecuaciones o sistemas "bonitos".

1. Sacar paréntesis si los tiene
2. Sacar denominadores si los tiene
3. Simplificar si se puede
4. Despejar la incógnita:
   a) Si algo está sumando a la incógnita, pasa al otro lado restando.
   b) Si algo está restando a la incógnita, pasa al otro lado sumando.
   c) Si algo está multiplicando a la incógnita, pasa al otro lado dividiendo.
   d) Si algo está dividiendo a la incógnita, pasa al otro lado multiplicando.
   e) Si la incógnita está elevada al cuadrado, el cuadrado pasa al otro lado como $\pm$ raíz cuadrada.
   f) Si la incógnita está dentro de una raíz cuadrada, la raíz pasa al otro lado como un cuadrado.
5. Aplicar el método de reducción, igualación o sustitución si tenemos un sistema de ecuaciones.

8. Ejercicios

1. Resuelve:

   a) $x^4 - 5x^2 + 4x = 0$

   b) $\sqrt{11 - x} + x = 5$

   c) $\sqrt{2x + 13} = 1 + \sqrt{x + 6}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

   b) $\dfrac{1}{x} + 3 = \dfrac{x - 3}{2x}$

   c) $\dfrac{x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\sqrt{3x + 1} = 4$

   b) $5x + 2 - 2\sqrt{x + 1} = -3$

   c) $\sqrt{2x - 3} + 1 = x$

   d) $\sqrt{5x - 7} - \sqrt{1 - x} = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$

   b) $4x^3 - 9 = 9x - 4x^2$

   c) $x^2 - 1 = 2x(1 - x^2)$

   d) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $3x(x - 1) = 0$

   b) $2(x - 2)(x - 3) = 0$

   c) $\dfrac{(x - 1)^2}{2} + \dfrac{x(x + 3)}{4} = 1$

   d) $\dfrac{x^2 - x}{3} + \dfrac{x - 1}{2} = 0$

   e) $\dfrac{(x - 2)^2}{3} - \dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 1 - 2x + \dfrac{3}{4}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

   a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 24 \\ y = 2x + 16 \end{array}\right\}$

   b) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 3 \end{array}\right.$

   c) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ x - 7y = 50 \end{array}\right.$

   d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con tres incógnitas:

   a) $\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ 2x - z = 4 \\ x + y = 6 - z \end{array}\right\}$

   b) $\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = 5 \\ 2y + z = 4 \\ 3z = 6 \end{array}\right\}$

   c) $\left.\begin{array}{l} 3x - y + 7z = -2 \\ 5x + 6y - 2z = 16 \\ 6x - 3y + 4z = 5 \end{array}\right\}$

   d) $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y + 2z = -7 \\ 7x + 2y - 4z = 5 \\ 5x - 4y + 3z = -1 \end{array}\right\}$