

Logaritmos

Índice

1. Introducción a los logaritmos	2
1.1. Ejemplos	2
1.2. Definición de logaritmo	2
1.3. Resolución de logaritmos	2
2. ¿Cómo se calculan los logaritmos?	3
3. Propiedades de los logaritmos	9
4. Ecuaciones y sistemas logarítmicos	13

1. Introducción a los logaritmos

Un logaritmo es una operación matemática utilizada para realizar de forma mas fácil las operaciones con números grandes.

Así, un logaritmo se escribe:

$$\log_b x = y$$

Y se lee como:

Logaritmo en base b de x es igual a y

Por tanto, un logaritmo tiene tres partes:

1. La palabra **log**: que indica que la operación que se va a hacer es un logaritmo
2. La base del logaritmo, b : Es un subíndice que indica la base del logaritmo
3. El número del cual se calculará el logaritmo: x

1.1. Ejemplos

- a) $\log_2 8$: Logaritmo en base 2 de 8
- b) $\log_{10} 100$: Logaritmo en base 10 de 100
- c) $\log_3 3$: Logaritmo en base 3 de 3

1.2. Definición de logaritmo

La operación logaritmo se define en matemáticas:

$$\log_b x = y :\Leftrightarrow b^y = x$$

Y se lee:

El logaritmo en base b de x es igual a y

si y solo si, por definición:

b elevado a y da x

1.3. Resolución de logaritmos

Así, resolvamos los anteriores logaritmos puestos de ejemplo:

- a) $\log_2 8 = 3$, ya que 2 elevado a 3 da 8
- b) $\log_{10} 100 = 2$, ya que 10 elevado a 2 da 100
- c) $\log_3 3 = 1$, ya que 3 elevado a 1 da 3

2. ¿Cómo se calculan los logaritmos?

Para calcular los logaritmos es conveniente seguir los siguientes pasos:

- 1) **Factorizar** el número del que se quiere calcular el logaritmo hasta dejarlo con la misma base del logaritmo
- 2) Aplicar la definición de logaritmo

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 2^3$

$\log_{\textcircled{2}} 8 = 3$
 es igual a
 elevado a

b) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 10^2$

$\log_{\textcircled{10}} 100 = 2$
 es igual a
 elevado a

c) $\log_3 3 = \log_3 3^1 = 1 \Leftrightarrow 3^1 = 3^1$

$\log_{\textcircled{3}} 3 = 1$
 es igual a
 elevado a



OOOOOOJOOOOO MANOLO!!!!

- Los logaritmos en base 10 NO suelen llevar la base explícita. Un logaritmo en base 10 se escribe:

$$\log 100 = 2$$

- Los logaritmos en base e o *logaritmos neperianos* se denotan con el texto Ln

Ejercicio: Calcular los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora

a) $\log_2 64 =$

b) $\log_3 27 =$

c) $\log_2 1 =$

d) $\log_3 \frac{1}{729} =$

e) $\log_2 \frac{1}{2} =$

f) $\log_3 \sqrt{3} =$

g) $\log_4 \frac{1}{2} =$

h) $\log_4 2\sqrt{2} =$

i) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{8}} =$

Ejercicio: Reemplaza el signo * por el valor que corresponda

a) $\log_6 \frac{1}{36} = *$

b) $\log_* 8 = 3$

c) $\log_2 * = 4$

d) $\log_8 256 = *$

e) $\log_* \frac{1}{343} = 3$

f) $\log_{729} * = \frac{1}{3}$

Ejercicio: Calcula x en las siguientes expresiones

a) $\log_x 25 = 2$

b) $\log_x 256 = 3$

c) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$

d) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

e) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

f) $\log_x 343 = 3$

g) $\log_x \frac{1}{64} = -6$

Ejercicio: Calcula x en las siguientes expresiones

a) $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$

b) $\log_x \frac{1}{100} = -2$

c) $\log_x 32 = 5$

d) $\log_x 81 = -4$

e) $\log_x 49 = 2$

Ejercicio: Escribe los siguientes números como logaritmos:

Ejemplo: Escribe el número 3 como resultado de un logaritmo en base 4:

$$3 = \log_4(4^3)$$

a) Escribe el número 1 como resultado de un logaritmo en base 10

b) Escribe el número 0 como resultado de un logaritmo en base 2

c) Escribe el número 2 como resultado de un logaritmo en base 7

d) Escribe el número 2 como resultado de un logaritmo en base 10

e) Escribe el número 3 como resultado de un logaritmo en base 10

f) Escribe el número 1 como resultado de un logaritmo en base 3

Ejercicio: *Calcula el valor de las siguientes expresiones*

a) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 4^2}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}}$

b) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{27}}$

c) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[4]{625}}{125}$

d) $\log_7 \frac{49 \cdot \sqrt[3]{343}}{\sqrt{2401}}$

3. Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos se “inventaron” para que fuera más sencillo el cálculo con números grandes. Esto es debido a sus tres propiedades:

- 1) La **suma** de logaritmos es igual al **logaritmo del producto**:

$$\log_b x + \log_b y = \log_b(x \cdot y)$$

- 2) La **resta** de logaritmos es igual al **logaritmo de la división**:

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \left(\frac{x}{y} \right)$$

- 3) El **producto** de un número por un logaritmo es igual al **logaritmo de la potencia** de ese número:

$$n \cdot \log_b x = \log_b x^n$$

Ejercicio resuelto: Escribe las siguientes expresiones como un solo logaritmo

- a) $\log_2 5 + \log_2 6 = \log_2(5 \cdot 6) = \log_2 30$
- b) $\log(ax) + \log(ay) = \log(ax \cdot ay) = \log a^2xy$
- c) $\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \left(\frac{50}{2} \right) = \log_5 25 = 2$
- d) $\ln a^2b^3 - \ln a^3bc = \ln \left(\frac{a^2b^3}{a^3bc} \right) = \ln \frac{b}{ac}$
- e) $\frac{1}{2} \log_2 64 = \log_2 64^{1/2} = \log_2 \sqrt{64} = \log_2 8 = 3$

Ejercicio resuelto: Desarrolla los siguientes logaritmos

- a) $\log(a^2b^5c^3) = 2 \log a + 5 \log b + 3 \log c$
- b) $\log \frac{x^2}{y \cdot z^3} = 2 \log x - \log y - 3 \log z$
- c) $\log_2 \sqrt{a \cdot b^3 \cdot c} = \frac{1}{2} (\log_2 a + 3 \log_2 b + \log_2 c) = \frac{1}{2} \log_2 a + \frac{3}{2} \log_2 b + \frac{1}{2} \log_2 c$

Ejercicio: Escribe las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

a) $\log_5 4 + \log_5 6$

b) $\log_2 x - \log_2 y$

c) $3 \log 5 + 3 \log 3$

d) $4 \log 2 - 7 \log 9$

e) $\frac{1}{2} \log x - \log y + 3 \log z$

f) $2 \log A - \frac{1}{3} \log B + 3 \log C - \frac{2}{5} \log D$

g) $2 (\log x - 3 \log y) - \frac{3}{5} \log(z + y)$

h) $-4 \log x - (-2 \log y) + \log z$

i) $-2 \log(x + 5) + \frac{1}{3} \log(x^2 + 2)$

Ejercicio: Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) $\log(xyz)$

b) $\log\left(\frac{xy}{z}\right)$

c) $\log\left(\frac{2xy}{5ab}\right)$

d) $\log(a^2b^3c^5)$

e) $\log[(a^4b^5c^3)]^2$

f) $\log(\sqrt{3xy})$

g) $\log\left(\frac{3\sqrt[5]{x}}{y\sqrt{z}}\right)$

h) $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8x^2y^7}{5z\sqrt{t^3}}}\right)$

i) $\log\left[\left(\frac{7^2bc}{4a^3b^5}\right)\right]^4$

j) $\log\left(\frac{5ab \cdot \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[5]{m^2}}{dt}\right)$

Ejercicio: Sabiendo que $\log(2) = 0,3$ y $\log(3) = 0,47$, desarrolla los siguientes logaritmos utilizando las potencias y calcúlalos:

a) $\log(4)$

b) $\log(6)$

c) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

d) $\log(\sqrt[3]{12})$

e) $\log(20)$

f) $\log(0,3)$

g) $\log(\sqrt{30})$

h) $\log(1,2)^2$

i) $\log\left(\sqrt[4]{\frac{9}{20}}\right)$

4. Ecuaciones y sistemas logarítmicos

Una ecuación es una expresión matemática en la cual queremos averiguar el valor de una variable usualmente llamada x .

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita, x , está situada dentro de un logaritmo.

Para resolver una ecuación logarítmica es conveniente realizar los siguientes pasos:

- 1) Utilizar las propiedades de los logaritmos para unir cada lado de la ecuación es un único logaritmo
- 2) Igualar la parte interior de los logaritmos
- 3) Resolver la ecuación
- 4) **¡¡¡¡Comprobar el resultado!!!!**

Ejemplo de resolución de ecuaciones logarítmicas

$$\log(x^2 + 6) - \log(x) = \log 10 - \log(2)$$

a) Utilizamos las propiedades de los logaritmos para unir la expresión de la derecha y de la izquierda en un solo logaritmo:

$$\log\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right) = \log\left(\frac{10}{2}\right)$$

$$\log\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right) = \log(5)$$

b) Igualamos las expresiones que se encuentran en el interior del logaritmo:

$$\cancel{\log}\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right) = \cancel{\log}(5)$$

c) Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x^2 + 6}{x} = 5$$

$$x^2 + 6 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \boxed{3}$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = \boxed{2}$$

d) Comprobamos las soluciones y valen las dos porque no dan logaritmos negativos ni que valgan 0.

Ejercicio: Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

b) $2 \log x = 3 + \log 10$

c) $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$

d) $\log(x^2 + 1) - \log(x) = 1$

e) $\log_2(9x^2 - 20) - \log_2(x) - \log_2(6) = 2$

f) $\log(x) - \log(x - 1) = 1$

g) $\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log(3/2)$

h) $\log(x) = 5/2$

i) $\log(x - 2) + \log(x) = \log(8)$

j) $\log(x - 5) + \log(x - 4) = 1$

k) $\log_4(3x - 8) = 3$

l) $2 \log x - \log 16 = 0$

m) $\log x + \log 5 = 1 + 2 \log(x - 3)$

n) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$ ← OOOOJJJOOOO!!!!