Números irracionales

Índice

1. Introducción

Ahora que ya somos mayorcitos y hemos dado raíces desde... sexto de primaria, vamos a repasar un poco este tema y ejercitarnos en la realización de operaciones básicas con raíces, es decir, hacer sumas y restas, multiplicaciones y divisiones, potencias y raíces de raíces.

2. Suma y resta de raíces

Como todos sabemos ya, una raíz tiene diferentes partes:

- el índice
- el símbolo radical
- el radicando

En las operaciones con raíces tenemos que tener en cuenta otra parte más llamada coeficiente.

El **coeficiente** de una raíz es el numero que se sitúa fuera de la raíz y que la multiplica. Ejemplo:

$$3 \cdot \sqrt{5}$$

Donde:

- El 3 es el coeficiente
- El 2 el índice de la raíz
- El $\sqrt{}$ el símbolo radical
- El 5 es el radicando.

Identifica tú ahora las partes de la siguiente raíz:

$$5\sqrt[4]{31}$$

- 5 es el ....
- 4 es el ....
- 31 es el ....

Para poder sumar y restar raíces tenemos que tener en cuenta un detalle muuuuy importante:

OOOOOOJOOOOO MANOLO!!!!

NO SE PUEDEN SUMAR NI RESTAR RAÍCES SI NO TIENEN EL MISMO ÍNDICE Y EL MISMO RADICANDO

Por ejemplo:

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{8}$$

no se pueden sumar, debido a que estamos intentando sumar cosas distintas.

Dicho con palabras: Tres raíces de cinco más cuatro raíces de ocho, no se pueden sumar.

Es como si intentáramos sumar tres chicles con cuatro chorizos: el resultado sería tres chicles y cuatro chorizos.

Sin embargo, si tenemos tres chicles y cuatro chicles sí se podrían sumar, y darían siete chicles.

De igual manera, si tenemos:

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

sí se pueden sumar y el resultado da:

$$7\sqrt{5}$$

***Ejercicio**: Efectúa las siguientes sumas y restas de raíces.*:

a) $6\sqrt{7} + 8\sqrt{7} =$

b) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} =$

c) $5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} =$

d) $4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} =$

e) $6\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3} =$

Deduciremos ahora cual es la regla para sumar raíces:

Para sumar raíces, sumamos los .... y ponemos el mismo ...., el mismo .... y el mismo ....

Ejercicio: Realiza las siguientes sumas y restas con raíces:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$

b) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$

c) $6\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} =$

d) $3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt{2} - 2\sqrt[5]{2} + 4\sqrt{3} =$

e) $3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} =$

3. Extraer factores de dentro de una raíz

Muchas veces nos encontraremos con problemas de sumas y restas de raíces que parece que no se pueden sumar, pero que realmente sí se puede:

NOS QUIEREN ENGAÑAR!!!!

pero como nosotros somos más listos, veamos ahora cómo detectar el engaño y cómo resolverlo.

Siempre que vayamos a sumar o restar raíces tenemos que ver si los números del radicando son *primos*[1] Así, para sumar y restar raíces cuyos radicandos no son números primos tendremos que seguir dos pasos:

1. Factorizar los radicandos
2. Extraer todos los factores posibles fuera del radical

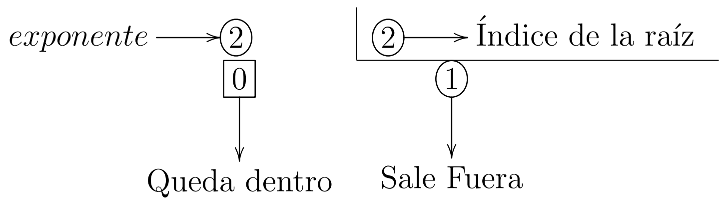
Extraer factores de dentro de una raíz

1. Factorizar el radicando en factores primos
2. Dividir los exponentes de los factores entre el índice de la raíz
3. El resto de la división es el exponente del factor que queda dentro
4. El cociente de la división es el exponente del factor que sale fuera

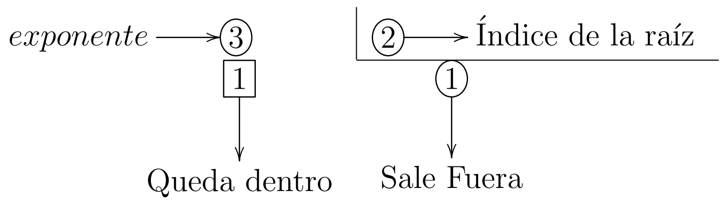
Veamos un ejemplo:

$\sqrt{392} = \sqrt{7^2 \cdot 2^3}$

Los factores son 7 y 2.
Empezamos sacando fuera el 7: Dividimos el exponente del 7 entre el índice de la raíz



Sacamos fuera el 2: Dividimos el exponente del 3 entre el índice de la raíz



[1]Número primo: Los que solo se pueden dividir por sí mismos y por la unidad: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Por tanto: $\sqrt{392} = 7^1 \cdot 2^1\sqrt{2^1} = 14\sqrt{2}$

***Ejercicio**: Extrae todos los factores posibles de las siguientes raíces:*

a) $\sqrt{216b^4}$

h) $\sqrt[3]{125b^4x^7}$

b) $\sqrt{1024b^5}$

i) $\sqrt[3]{64b^{12}x^9y^6}$

c) $\sqrt{36b^3x^{12}}$

j) $\sqrt[4]{1024x^5}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}b^3}$

k) $\sqrt[4]{243b^7}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{32b}}$

l) $\sqrt[4]{32b^5m^6}$

f) $\sqrt{\dfrac{18b^6}{75b^3}}$

m) $\sqrt[3]{81b^7}$

g) $\sqrt[3]{8b^6c^5}$

n) $\sqrt[5]{128m^{10}}$

Ejercicio: *Efectúa las siguientes operaciones:*

a) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$

b) $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300} - \sqrt{108}$

c) $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125}$

d) $5\sqrt{44} - 3\sqrt{275} + 6\sqrt{396} - \sqrt{1331}$

e) $7\sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 5\sqrt{343} - 2\sqrt{7}$

4. Introducir factores dentro del radical

Introducir factores dentro del radical es mucho más fácil que sacarlos, basta con

Multiplicar el exponente del factor por el índice de la raíz.

Ejemplo:

$$5^2\sqrt[3]{2x^2y} = \sqrt[3]{(5^2)^3 \cdot 2x^2y} = \sqrt[3]{5^6 \cdot 2x^2y}$$

***Ejercicio**: Extrae todos los factores posibles de las siguientes raíces:*

a) $2x\sqrt{x}$

b) $3mx^2\sqrt{mx}$

c) $\dfrac{4x}{3}\sqrt{3xy}$

d) $\dfrac{2}{8}\sqrt{\dfrac{2}{27}x}$

e) $3\sqrt[3]{3}$

f) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{9}$

g) $\dfrac{2}{3}a\sqrt[3]{\dfrac{9a}{16}}$

5. Multiplicación de raíces

Para poder multiplicar raíces tenemos que tener en cuenta dos casos:

1) Las raíces tienen el mismo índice

2) Las raíces NO tienen el mismo índice

5.1. Multiplicacion de raíces cuando NO tienen el mismo índice

Si las raíces NO tienen el mismo índice tenemos que hacer algo para ponerlas con el mismo índice. Como recordáis, las raíces se pueden poner como exponentes fraccionarios de una potencia, y para todas las fracciones se pueden buscar fracciones equivalentes. Aprovechando esta propiedad, podemos transformar las raíces de distinto índice en raíces con índice común. Cómo?

Pues muy fácil, haciendo lo miiismo que lo que hacíamos con las fracciones para poner denominador común. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

$$\sqrt[15]{2} \text{ y } \sqrt[12]{7}$$

Lo primero que hay que hacer es:

1) Buscar el m.c.m de los índices: en este caso, el m.c.m de 15 y 12 que es 60

2) El m.c.m es el índice común de las raíces, así que escribimos el símbolo radical con el nuevo índice:

3) Luego, dividimos el índice común entre cada uno de los índices antiguos y elevamos el radicando al resultado de la división

En nuestro caso quedaría:

$$\sqrt[60]{2^4} \text{ y } \sqrt[60]{7^5}$$

Ahora prueba tú:

Ejercicio*: Escribe con índice común las siguientes raíces:*

a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[5]{7}$ y $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[4]{3^2}$ y $\sqrt[5]{2^3}$

d) $\sqrt[6]{3^4}$ y $\sqrt[9]{8}$

5.2. Multiplicación de raíces con el mismo índice

Una vez que tenemos todas las raíces con el mismo índice multiplicarlas resulta muy sencillo tan solo tenemos que multiplicar los coeficientes (si los tiene), meter todos los radicandos en una raizota grande con el índice común y multiplicar los radicandos:

Ejemplo:

$$2\sqrt[3]{5}\cdot 6\sqrt[3]{4} = 2\cdot 6\cdot \sqrt[3]{5\cdot 4} = 12\sqrt[3]{20}$$

***Ejercicio**: Calcula los siguientes productos de raíces:*

a) $8\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{4} =$

b) $-5\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{2} =$

c) $2\sqrt[3]{3}\cdot 4\sqrt[3]{4}\cdot 3\sqrt[3]{2} =$

d) $\sqrt{5}\cdot\left(-2\sqrt{4}\right)\cdot 3\sqrt{3} =$

e) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$

f) $3\sqrt[4]{5}\cdot 7\sqrt[3]{2}$

6. División de raíces

Para dividir raíces hay que seguir exáctamente los mismos pasos que para la multiplicación peeero en cuanto tenemos el índice común, tenemos que dividir los coeficientes y los radicandos. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

$$9\sqrt{128} : 3\sqrt{16} = \frac{9}{3}\sqrt{\frac{128}{16}} = 3\sqrt{8}$$

A ver si lo hemos entendido:

***Ejercicio**: Calcula los siguientes productos de raíces:*

a) $16\sqrt[3]{9} : 2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{4}$

c) $3\sqrt[3]{5} : 27\sqrt{5}$

d) $\sqrt{7} : \sqrt{49}$

e) $10\sqrt{121} : 5\sqrt{11}$

7. Potencia de una raíz

Para calcular la potencia de una raíz tenemos que hacer la **potencia del radicando**, es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Vamos a verlo con un ejemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3^3}\right)^2 = \sqrt[5]{(3^3)^2} = \sqrt[5]{3^6}$$

***Ejercicio**: Calcula las potencias de las siguientes raíces y extrae factores cuando sea posible:*

a) $\left(\sqrt[3]{a \cdot b^3 \cdot c^4}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{3 \cdot 5^5}\right)^3$

c) $\left(\sqrt[7]{3^4 x^2 y^4 z^3}\right)^5$

d) $\left(\sqrt[4]{8 \cdot 25 \cdot 9}\right)^5$

8. Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz basta con **multiplicar los índices de las raíces**, es decir:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Vamos a ver un ejemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{4}} = \sqrt[10]{4}$$

***Ejercicio**: Calcula las potencias de las siguientes raíces:*

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{xy^2}}$

b) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

9. Racionalización

La última parte del tema de raíces es la dedicada a la Racionalización. ¿Qué es racionalizar?

Racionalizar es quitar las raíces del denominador

Pensadlo bien, si las raíces ya son un rollo, y los denominadores también, imaginaos como será una operación en la que tengáis una raíz en el denominador. Aprenderemos ahora a racionalizar, es decir: cargarnos las raíces de los denominadores.

Para racionalizar tendremos que encontrar una fracción equivalente a la dada, pero que no tenga raíces en el denominador. Tendremos dos casos en los que nos encontraremos raíces en el denominador y por tanto dos técnicas:

1) Cuando en el denominador aparece una raíz y 'cosas' multiplicándola.

2) Cuando en el denominador aparece una raíz y 'cosas' sumando o restando.

9.1. Denominador con un solo término

Cuando en el denominador aparece una raíz y 'cosas' multiplicándola, tenemos un solo término en el denominador.

Para quitar del denominador una raíz de este tipo, tenemos que multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por un número que haga que la raíz desaparezca. ¿Cuál es ese número? Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo: Racionalizar la siguiente fracción:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{x^2y^4}} = \frac{3}{\sqrt[5]{x^2y^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3y}}{\sqrt[5]{x^3y}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{x^3y}}{\sqrt[\cancel{5}]{x^{\cancel{5}}y^{\cancel{5}}}} = \frac{3\sqrt[5]{x^3y}}{xy}$$

Ejercicio*: Racionaliza:*

a) $\dfrac{a}{\sqrt{m}}$

b) $\dfrac{7}{3 \cdot \sqrt[6]{7^4}}$

c) $\dfrac{m}{q \cdot \sqrt[5]{m^2}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[7]{2^3}}$

9.2. Denominador con dos términos

Cuando en el denominador de una fracción tenemos una raíz con una suma o una resta (por ejemplo: sumas de raíces, restas de raíces, suma de una raíz por un número...), el método utilizado para poder quitarla es recordando previamente una de las identidades notables estudiadas en el curso anterior:

Suma por diferencia...
¡¡¡diferencia de cuadrados!!!

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Veamos cómo se racionalizan este tipo de fracciones con un ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt[\cancel{2}]{3}\right)^{\cancel{2}} - \left(\sqrt[\cancel{2}]{2}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1} = 3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

Método para racionalizar

1) Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado[a] del denominador.

2) Usar en el denominador la identidad notable: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

3) Simplificar

[a] el denominador cambiando el signo del medio

Ejercicio: *Racionaliza:*

a) $\dfrac{12}{\sqrt{4}+1}$

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

Ejercicio: *Racionaliza:*

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

10. Escribir la raíz en forma de potencia

Hay otra manera de escribir las raíces sin utilizar el signo radical, y ésta es escribirla en forma de potencia. Para escribir una raíz en forma de potencia basta con:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{3^4} = 3^{4/5}$$

***Ejercicio**: Escribe las siguientes raíces como potencias:*

a) $\sqrt{3^5}$

b) $\sqrt[3]{x^{17}}$

c) $\sqrt[4]{2^3}$

11. Simplificación del índice de la raíz

Muchas veces nos encontramos con raíces que tienen índices muy altos y que se pueden simplificar. Para ello basta con:

1) Escribir la raíz en forma de potencia

2) Simplificar el exponente de la potencia

3) Volver a escribir la potencia en forma de raíz

Ejemplo:

$$\sqrt[9]{x^6} = x^{\frac{6}{9}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

***Ejercicio**: Simplifica los índices de las siguientes raíces:*

a) $\sqrt[5]{3^{10}}$

b) $\sqrt[26]{x^{13}}$

c) $\sqrt[15]{2^3}$