Ecuaciones exponenciales

Índice

1. Introducción a las ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es una expresión matemática en la cual debemos hallar el valor de una incógnita que se encuentra en el exponente.

Hay varios tipos de ecuaciones exponenciales y para resolverlas tenemos primero que detectar a qué tipo pertenece y luego aplicar el método de resolución.

2. Resolución de ecuaciones exponenciales simples

Una ecuación exponencial simple es aquella en la cual la incógnita aparece en un solo término en uno o los dos miembros de la ecuación. Ejemplo:

$$5^{(x+1)} = 125$$

Para resolver este tipo de ecuaciones tenemos que empezar factorizando los términos de manera que nos queden las bases iguales:

$$5^{(x+1)} = 5^3$$

La solución se obtiene igualando los exponentes y resolviendo la ecuación:

$$x + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Ejercicio:*Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:*

a) $4^{x^2-6x} = 16384$

b) $2^{2x-1} = 4$

c) $100^x = 10^{3x+2}$

d) $3^{4x-1} = 3^{6x-1}$

e) $4^{x+3} = 8^{x-2}$

Soluciones: a) $x_1 = -1$ $x_2 = 7$; b) $x = \dfrac{3}{2}$; c)$x = -2$; d) $x = 0$; e) $x = 12$

3. Resolución de ecuaciones exponenciales simples cuando no tienen la misma base

Cuando al factorizar nos encontramos con que es imposible tener la misma base en los dos términos de la ecuación, no podemos igualar los exponentes ya que las bases tampoco son iguales.

Para resolver este tipo de ecuaciones, nos ayudamos de los logaritmos y sus propiedades.

Ejemplo:

$$5^x = 256$$

$$5^x = 2^8$$

Aplicamos logaritmos en las dos partes de la ecuación:

$$\log 5^x = log 2^8$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para que la x salga fuera del logaritmo multiplicando:

$$x \cdot \log 5 = \log 2^8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\log 256}{\log 5}}$$

***Ejercicio**: Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:*

a) $3^{x^2-1} = 134$

b) $10^{x+2} = 5$

c) $2^{2x} \cdot 2 = 3^x \cdot 3^5$

Soluciones: a) $x = \pm\sqrt{\frac{\log 134}{\log 3} + 1}$ *b)* $x = \log(5) - 2 = -\log 20$ *c)* $x = \frac{\log \frac{3^5}{2}}{\log \frac{2^2}{3}}$

4. Ecuaciones exponenciales con varios términos

Cuando tenemos una incógnita en varios sumandos de la ecuación, no podemos aplicar las propiedades anteriores. Es por ello por lo que tenemos que recurrir a otro método utilizando en este caso las propiedades de las potencias.

RECORDEMOS:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

4.1. Ejemplo de resolución de ecuaciones exponenciales

Para resolver ecuaciones exponenciales tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Utilizar las propiedades de las potencias
2. Hacer un cambio de variable
3. Resolver la ecuación
4. Deshacer el cambio y resolver la ecuación exponencial simple

Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación exponencial:

$$3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} = 3$$

1: Aplicamos las propiedades de las potencias:

$$\frac{3^{2x}}{3^1} - \frac{8 \cdot 3^x}{3^1} = 3$$

$$\frac{(3^x)^2}{3^1} - \frac{8 \cdot 3^x}{3^1} = 3$$

2: Cambio de variable:

$$3^x = Z$$

$$\frac{Z^2}{3} - \frac{8 \cdot Z}{3} = 3$$

3: Resolvemos la ecuación:

$$Z^2 - 8Z = 9$$

$$Z^2 - 8Z - 9 = 0$$

$$Z = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

$$Z_1 = \frac{18}{2} = 9 \qquad Z_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

4: Deshacemos el cambio:

$$Z = 3^x \Rightarrow 9 = 3^x \Rightarrow 3^2 = 3^x \Rightarrow \boxed{\text{x=2}}$$

$$Z = 3^x \Rightarrow -1 = 3^x \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Ejercicio: *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:*

a) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$ *Solución: x=3*

b) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$ *Solución: x=10*

c) $7^{2x+1} - 2 \cdot 7^{x+1} + 7 = 0$ *Solución: x=0*

5. Ejercicios

1. $3^{2x-3} = 27^{(x+1)/3}$
2. $3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} = 3$
3. $100^{x} = 10^{3x+2}$
4. $3^{4x-1} = 3^{6x-1}$
5. $4^{x+3} = 8^{x-2}$
6. $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 224$
7. $2^{2(x+1)} + 2^{x+3} - 320 = 0$
8. $9^{x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
9. $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-1/4}}$
10. $2^{2x-1} = 4$
11. $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$
12. $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$
13. $\sqrt[3]{8^{x}} = 65536$
14. $4^{x^2-6x} = 16384$
15. $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$
16. $3^{1-x} - 3^{x} = 2$
17. $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$
18. $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

1. *Solución: x=4*
2. *Solución: x=2*
3. *Solución: x=-2*
4. *Solución: x=0*
5. *Solución: x=12*
6. *Solución: x=6*
7. *Solución: x=3*
8. *Solución: x=2*
9. *Solución:* $x = 1/2$; $x = 5/2$
10. *Solución:* $x = 3/2$
11. *Solución: x=-3/4*
12. *Solución: x=-2 ; x=2*
13. *Solución: x=16*
14. *Solución: x=-1; x=7*
15. *Solución: x=3*
16. *Solución: x=0*
17. *Solución: x=-1*
18. *Solución: x=3*