Polinomios

Índice

1. Operaciones con polinomios

1.1. Suma de polinomios

Para sumar polinomios basta con sumar cada uno de los monomios que los componen siguiendo las normas de multiplicación de monomios, es decir: **Se suman los coeficientes de los monomios que tienen la misma parte literal**.

Ejemplo:

$A(x) = 2x^3 - x^2 + 4x^5$
$B(x) = -3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1$

$A(x) + B(x) = 2x^3 - x^2 + 4x^5 + (-3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1) =$
$2x^3 - x^2 + 4x^5 - 3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1 =$

$$\boxed{x^5 + 5x^3 - 8x^2 + 1}$$

1.2. Resta de polinomios

Para restar polinomios se **cambia de signo** al polinomio que resta (sustraendo) y se suman los polinomios siguiendo las reglas de la suma.

Ejemplo:

$A(x) = 2x^3 - x^2 + 4x^5$
$B(x) = -3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1$

$A(x) + B(x) = 2x^3 - x^2 + 4x^5 - (-3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1) = 2x^3 - x^2 + 4x^5 + 3x^5 - 3x^3 + 7x^2 - 1 =$

$$\boxed{7x^5 - x^3 + 6x^2 - 1}$$

Ejercicio:*Realiza las siguientes sumas y restas de polinomios:*

a) $(3x^4 + 3x^3 + 3) + (-2x^4 - 7x^3 + x^2 + 1) =$

b) $(3x^4 + 3x^3 + 3) - (-2x^4 - 7x^3 + x^2 + 1) =$

1.3. Multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios **se multiplican entre sí cada uno de los términos de los polinomios**.

Ejemplo:

$A(x) = 2x^3 - x^2 + 4x^5$
$B(x) = -3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1$

$A(x) \cdot B(x) = (2x^3 - x^2 + 4x^5) \cdot (-3x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 1) =$

$-6x^8 + 6x^6 - 14x^5 + 2x^3 + 3x^7 - 3x^5 + 7x^4 - x^2 - 12x^{10} + 12x^8 - 28x^7 + 4x^5 =$

$$\boxed{-12x^{10} + 6x^8 - 25x^7 + 6x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 2x^3 - x^2}$$

Ejercicio:*Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:*

a) $(3x^4 + 3x^3 + 3) \cdot (x^3 + x^2 + 1) =$

b) $(-2x^2 + 5x^3 + 1) \cdot (x^2 + 1) =$

1.4. División de polinomios

Explicaremos la división de polinomios mediante un ejemplo:

$A(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x + 1$
$B(x) = 2x^2 - 1$

Haremos la división: $A(x) \div B(x)$

1. Ordenamos los polinomios en grado decreciente.

$$\begin{array}{cccc|cc} +4x^3 & -2x^2 & -4x & +1 & 2x^2 & -1 \\ \cline{5-6} \end{array}$$

2. Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. $\dfrac{4x^3}{2x^2} = 2x$

3. Escribimos ese resultado como primer término del cociente.

$$\begin{array}{cccc|cc} +4x^3 & -2x^2 & -4x & +1 & 2x^2 & -1 \\ \cline{5-6} & & & & 2x & \end{array}$$

4. Multiplicamos el término del cociente por el divisor y el resultado lo escribimos debajo del término del dividendo que tenga el mismo grado.

$$\begin{array}{cccc|cc} +4x^3 & -2x^2 & -4x & +1 & 2x^2 & -1 \\ \cline{5-6} +4x^3 & & -2x & & 2x & \end{array}$$

5. Restamos el divisor menos la multiplicación que acabamos de hacer.

$$\begin{array}{cccc|cc} \cancel{+4x^3} & -2x^2 & -4x & +1 & 2x^2 & -1 \\ \cline{5-6} \cancel{-4x^3} & & +2x & & 2x & \\ \cline{1-3} & -2x^2 & -2x & +1 & & \end{array}$$

6. Repetimos el procedimiento hasta que el grado del resto sea más pequeño que el grado del divisor.

$$\begin{array}{cccc|cc} \cancel{+4x^3} & -2x^2 & -4x & +1 & 2x^2 & -1 \\ \cline{5-6} \cancel{-4x^3} & & +2x & & 2x & -1 \\ \cline{1-3} & \cancel{-2x^2} & -2x & \cancel{+1} & & \\ & \cancel{+2x^2} & & \cancel{-1} & & \\ \cline{2-4} & & -2x & & & \end{array}$$

7. La solución será:

Cociente: $2x - 1$ Resto:$-2x$

1.5. Division de polinomios: Método de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento fácil para dividir cualquier polinomio entre binomios del tipo $(x-a)$

Explicaremos mediante un ejemplo el método de Ruffini de división de polinomios:
$A(x) = 2x^4 - 9x^2 + 24x - 1$ $B(x) = x + 3$ Haremos la división $A(x) \div B(x)$

1) Ordenamos el polinomio en orden decreciente poniendo ceros en los términos que faltan:

$$2x^4 \quad +0x^3 \quad -9x^2 \quad +24x \quad -1$$

2) Escribimos los coeficientes del polinomio ordenado:

$$2 \quad 0 \quad -9 \quad +24 \quad -1$$

3) Escribimos una raya horizontal y otra vertical y el **término independiente** del divisor **CAMBIADO DE SIGNO**

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -9 & +24 & -1 \\ -3 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

4) Bajamos el primer número debajo de la raya

5) Lo multiplicamos por el término independiente del divisor

6) Colocamos el resultado de la división debajo del siguiente número

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +2 & +0 & -9 & +24 & -1 \\ -3 & & -6 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

7) Sumamos las columnas

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +2 & +0 & -9 & +24 & -1 \\ -3 & & -6 & & & \\ \hline & 2 & -6 & & & \end{array}$$

8) Repetimos la operación desde el punto 3

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & +2 & +0 & -9 & +24 & -1 \\ -3 & & -6 & +18 & -27 & +9 \\ \hline & 2 & -6 & +9 & -3 & +8 \end{array}$$

El cociente de la división es **un grado menos** que el polinomio original, y los coeficientes son el resultado de aplicar Ruffini. El resto es el último término del método de Ruffini. Así:

Cociente: $C(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ **Resto**: 8

Ejercicio: *Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Utiliza el método de Ruffini siempre que puedas:*

a) $(2x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 5) : (x^3 + 2)$

b) $(x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x) : (x + 2)$

c) $(3x^5 - 4x^3 + x) : (x + 3)$

d) $(2x^{10} + 3x^9 - x^8 + 2x^5 - 10) : (x^8 + 2x)$

e) $(5x^3 - 5x^2 + 2x + 1) : (x - 1)$

2. Identidades notables

Para hacer la potencia de un polinomio, basta con multiplicar el polinomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente. Como este trabajo es habitualmente largo y aburrido (y es muy fácil confundirse), utilizamos unas expresiones llamadas **identidades notables** o **productos notables** para que sea más sencillo y rápido hacer **los cuadrados de los binomios** y **la suma de un binomio por su conjugado**.

Por tanto, las identidades notables son tres:

1) **Cuadrado de un binomio suma:** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2) **Cuadrado de un binomio resta:** $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3) **Suma por diferencia:** $(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$

Veamos un ejemplo de cada una de ellas:

Ejemplo: *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

b) $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + (3)^2 = x^2 - 6x + 9$

c) $(5+x)\cdot(5-x) = 25 - x^2$

Ejercicio: *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $(2x+3)\cdot(2x-3) =$

b) $(1-3x)\cdot(1+3x) =$

c) $(2x+5)\cdot(2x-5) =$

d) $(1-4x)^2 =$

e) $(25x+4y)^2 =$

f) $(x-2)^2 =$

g) $(4+x)^2 =$

h) $(x+6)^2 =$

i) $(2x+3)^2 =$

j) $(2-5x)\cdot(2+5x) =$

3. Factorización de polinomios

Todos sabemos que factorizar un número es encontrar todos sus divisores primos, de manera que, por ejemplo $24 = 2^2 \cdot 3$.

El caso de los polinomios es exactamente el mismo. Si tenemos un polinomio cualquiera $P(x)$, tenemos que encontrar polinomios de grado más pequeño, que multiplicados nos den como resultado $P(x)$.

Para factorizar un polinomio tenemos que seguir una serie de pasos:

1. Sacar factor común
2. Comprobar si el polinomio es una identidad notable
3. Buscar las raíces del polinomio: (Habitualmente por el método de Ruffini)
4. Escribir el polinomio como producto de (x-raíces)

Describiremos ahora cada uno de los pasos:

3.1. Sacar factor común

Cualquier polinomio $P(x)$ está compuesto por una suma o resta de monomios. A cada uno de esos monomios los llamaremos **términos**.

Sacar factor común no es más que encontrar todos aquellos factores (números, o letras) que tengan en común **todos** los términos del polinomio.

Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo: *Saca factor común en el siguiente polinomio:*

$$P(x) = 12x^4 - 36x^2 - 24x$$

Primero debemos **factorizar todos los coeficientes**

$$P(x) = 2^2 \cdot 3 \cdot x^4 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot x^2 - 2^3 \cdot 3 \cdot x$$

Ahora debemos ver qué factores (cositas multiplicando) hay en común en toooodos los términos. En nuestro caso tenemos en todos los términos:

$$2^2 \cdot 3 \cdot x$$

de manera que ese será nuestro factor común que debemos quitar a todos los términos.

El polinomio factorizado quedaría:

$$P(x) = 2^2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x^3 - 3x - 2) = 12x \cdot (x^3 - 3x - 2)$$

Ejercicio: *Saca factor común en los siguientes polinomios:*

a) $15x^2y - 20x^2z =$

b) $xy^3 + 8xy^2 - 6xy =$

c) $15a^2 - 5ab^2 =$

d) $-x + x^2 + x^3 + x^4 =$

e) $10x^2y - 25xy^2 =$

f) $3ax - bx^2 + 6x^3 =$

g) $-36x^5y - 8x^2y^2 - 12x^3y^4 - 16x^3y^3 =$

h) $12x^5 - 3x^4 + 18x^3 - 21x^2 =$

3.2. Identidades notables

Después de sacar factor común, debemos comprobar si el polinomio resultante proviene de una identidad notable es decir, en vez de hacer la identidad notable, tenemos que deshacerla.

Veamos unos ejemplitos:

Ejemplo: *Factoriza los siguientes polinomios.*

a) $P(x) = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)\cdot(x-5)$

b) $P(x) = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = (x+3)^2$

c) $P(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = (2x-1)^2$

Ejercicio: *Expresa en forma de igualdades notables:*

a) $4x^2 - 9 =$

b) $1 - 8x + 16x^2 =$

c) $25x^2 + 40xy + 16y^2 =$

d) $x^2 - 4x + 4 =$

e) $x^2 + 12x + 36 =$

f) $1 - 9x^2 =$

3.3. Buscar raíces de un polinomio

Para buscar las raíces de un polinomio es conveniente primero saber qué es la raíz de un polinomio.

La raíz de un polinomio es aquel número que sustituido en la x nos da como resultado 0.

Así, para buscar las raíces de un polinomio y factorizar se suele utilizar conjuntamente el **Teorema del resto, el Teorema del factor y el método de Ruffini**.

Vamos a intentar factorizar el polinomio:

$$P(x) = 12x^4 - 36x^2 - 24x$$

Primero tenemos que sacar factor común (que ya lo hemos hecho antes, en el apartado "sacar factor común")

$$P(x) = 12x^4 - 36x^2 - 24x = \underbrace{12x}_{\text{F.C}} \cdot \underbrace{(x^3 - 3x - 2)}_{Q(x)}$$

De manera que nos encontramos con el factor común (F.C= $12x$) y con un polinomio de grado 3 ($Q(x) = x^3 - 3x - 2$) y que tiene **como máximo** 3 raíces (porque es de grado 3).

Para averiguar las raíces de $Q(x)$ y poder seguir factorizando utilizamos el Teorema del resto y el Teorema del factor, que dicen:

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $(x - a)$ es igual al valor que toma el polinomio al sustituir x por a

TEOREMA DEL FACTOR

El polinomio $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $(x - a)$ si y solo si $P(x = a) = 0$

Vale, ¿qué significa esto? Pues que **cualquier número que pongamos en vez de la x y que de como resultado 0, va a ser una raíz del polinomio $P(x)$, y por tanto $(x - a)$ será un factor del polinomio $P(x)$.**

Ahora bien, de entre todos los números, ¿cuál elegimos como "conejillo de indias" para ver si es un factor?. Pues siempre **los divisores del término independiete**.

En nuestro caso, el término independiente de $Q(x)$ es 2, por tanto elegiremos: $+1$, -1, $+2$, -2.

Sustituiremos la x por 1 (OJO: para indicar que la x va a ser sustituida por 1 escribimos $Q(1)$ en vez de $Q(x)$)
$Q(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ NO VALE $\qquad Q(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = 0 \Rightarrow$ **SÍ VALE**

Eso significa que si dividimos $Q(x)$ entre $(x + 1)$ nos va a dar exacto!!! (resto =0). Dividamos entonces

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente: $x^2 - x - 2$

Lo cual quiere decir que nuestro polinomio $P(x)$ se puede escribir:

$$P(x) = \underbrace{12x}_{\text{F.C}} \cdot \underbrace{(x + 1)}_{\text{Divisor de Ruffini}} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{\text{Nuevo } Q(x)}$$

Repetimos ahora el procedimiento para el nuevo polinomio $Q(x) = x^2 - x - 2$, que, al tener grado 2, en principio, se puede factorizar y tendrá 2 raíces.

El término independiente es 2, así que volvemos a coger como "conejillos de indias" a los números: -1, $+1$, -2 y $+2$
.

Sustituimos la x por el -1:

$Q(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow$ **SÍ VALE**

Dividimos por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente: $x + 1$ Como tiene grado 1 YA NO SE PUEDE FACTORIZAR MÁS

De esta forma, el polinomio factorizado quedará como:

$$P(x) = \underbrace{12x}_{\text{F.C}} \cdot \underbrace{(x+1)}_{\text{Divisor de Ruffini}} \cdot \underbrace{(x-2)}_{\text{Divisor de Ruffini}} \cdot (x+1) = \boxed{12x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)}$$

Ejercicio: *Factoriza los siguientes polinomios:*

a) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 =$

b) $9x^4 - 4x^2 =$

Ejercicio: *Factoriza los siguientes polinomios:*

a) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x =$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 =$

c) $x^4 - 1 =$

4. Fracciones Algebraicas

Las fracciones algebraicas son divisiones de polinomios. Para operar con fracciones algebraicas debemos utilizar los mismo métodos que usamos para operar con fracciones de números.

4.1. Simplificación de fracciones algebraicas

Empezaremos simplificando fracciones algebraicas mostrando un ejemplo:

Números	Polinimios	
$\dfrac{10}{25}$	$\dfrac{x^2-25}{x^2+10x+25}$	
$\dfrac{5\cdot 2}{5^2}$	$\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+5)^2}$	$\Rightarrow$ Factorizamos numerador y denominador
$\dfrac{\cancel{5}\cdot 2}{5^{\cancel{2}}}$	$\dfrac{\cancel{(x+5)}(x-5)}{(x+5)^{\cancel{2}}}$	$\Rightarrow$ Simplificamos **LOS FACTORES**
$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{(x-5)}{(x+5)}$	$\Rightarrow$ SOLUCIÓN

Ejercicio: *Simplifica al máximo las siguientes fracciones algebraicas:*

a) $\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+x^2-8x-4}$

b) $\dfrac{x^4-3x^3-x^2+3x}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{2x^3-4x^2+2x}$

4.2. Mínimo común múltiplo

Para hacer sumas de fracciones algebraicas hay que seguir los mismos pasos que con los números,es por ello por lo que, si tenemos fracciones con distintos denominadores,es necesario hacer el mínimo común múltiplo.

Ejemplo:

Números	Polinomios	
m.c.m (12, 5, 10)	m.c.m$[(x^3 - 3x - 2),\ (x+3),\ (x^2+4x+3)]$	
$12 = 2^2 \cdot 3$	$(x^3 - 3x - 2) = (x+1)^2 \cdot (x-2)$	$\Rightarrow$ Factorizamos
$5 = 5$	$(x+3) = (x+3)$	$\Rightarrow$ Factorizamos
$10 = 2 \cdot 3$	$(x^2+4x+3) = (x+3) \cdot (x+1)$	$\Rightarrow$ Factorizamos
$m.c.m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$m.c.m = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+3)$	$\Rightarrow$ Tomamos los **factores comunes** con **mayor exponente** y los factores **no comunes**

Ejercicio: *Halla el m.c.m y el m.c.d de los siguientes polinomios:*

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$Q(x) = x^2 + 4x + 4$
$R(x) = x$

b) $P(x) = x^2 - 1$
$Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Ejercicio: *Halla el m.c.m de los siguientes polinomios:*

a) $P(x) = (x+1)^2$
$Q(x) = x^2 - 1$

b) $P(x) = x^2 - 1$
$Q(x) = x + 1$
$R(x) = 3x - 3$

c) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
$Q(x) = x^2 + 4x + 4$
$R(x) = x$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2$
$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
$R(x) = x^3 - 9x$

4.3. Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para multiplicar o dividor fracciones algebraicas hacemos “casi” como con las fracciones de números.

Normalmente tenemos la costumbre (mala costumbre) de hacer las multiplicaciones (multiplicando el línea) o divisiones (multiplicando en cruz) de fracciones y luego simplificar.

En el caso de las fracciones algebraicas se INDICA LA MULTIPLICACIÓN PERO NO SE HACE, sino que SE SIMPLIFICA PRIMERO. Ejemplo:

Números	Polinomios	
$\dfrac{25}{9}\cdot\dfrac{15}{5}$	$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4}\cdot\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$	$\Rightarrow$ Multiplicamos en linea. Si fuera una división multiplicaríamos en cruz
$\dfrac{25\cdot 15}{9\cdot 5}$	$\dfrac{(x^2+2x+1)\cdot(x^2-x-2)}{(x^2-4x+4)\cdot(x+1)}$	$\Rightarrow$ Indicamos la multiplicación pero NO LA HACEMOS
$\dfrac{5^2\cdot 3\cdot 5}{3^2\cdot 5}$	$\dfrac{(x+1)^2\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{(x-2)^2\cdot(x+1)}$	$\Rightarrow$ Factorizamos
$\dfrac{5^2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{3^{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}}$	$\dfrac{(x+1)^2\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+1)}}{(x-2)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x+1)}}$	$\Rightarrow$ Simplificamos
$\dfrac{5^2}{3}$	$\boxed{\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)}}$	$\Rightarrow$ SOLUCIÓN

Ejercicio: *Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:*

a) $\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+5}{2x^2+6x}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2}:\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

4.4. Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas seguiremos los mismos pasos que con fracciones numéricas. Ejemplo:

Números	Polinomios	
$\frac{7}{10}-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}$	$\frac{x+2}{x^2-x}-\frac{2}{x-1}+\frac{3x}{x^2-1}$	
$m.c.m=2\cdot3\cdot5$	$m.c.m=x(x-1)(x+1)$	$\Rightarrow$ Calculamos el **divisor común**
$\frac{}{2\cdot3\cdot5}-\frac{}{2\cdot3\cdot5}+\frac{}{2\cdot3\cdot5}$	$\frac{}{x(x-1)(x+1)}-\frac{}{x(x-1)(x+1)}+\frac{}{x(x-1)(x+1)}$	
$\frac{3\cdot7}{2\cdot3\cdot5}-\frac{3\cdot5\cdot3}{2\cdot3\cdot5}+\frac{2\cdot3\cdot5}{5\cdot5}$	$\frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)(x+1)}-\frac{x(x+1)\cdot2}{x(x-1)(x+1)}+\frac{x\cdot3x}{x(x-1)(x+1)}$	$\Rightarrow$ Dividimos el
	divisor común entre los divisores y el resultado lo multiplicamos por el numerador	
$\frac{21}{2\cdot3\cdot5}-\frac{45}{2\cdot3\cdot5}+\frac{25}{2\cdot3\cdot5}$	$\frac{x^2+3x+2}{x(x-1)(x+1)}-\frac{2x^2+2x}{x(x-1)(x+1)}+\frac{3x^2}{x(x-1)(x+1)}$	$\Rightarrow$ Operamos los numeradores
$\frac{21-45+25}{2\cdot3\cdot5}$	$\frac{x^2+3x+2-(2x^2+2x)+3x^2}{x(x-1)(x+1)}$	$\Rightarrow$ Sumamos los numeradores
$\frac{1}{2\cdot3\cdot5}$	$\frac{x^2+3x+2-2x^2-2x+3x^2}{x(x-1)(x+1)}$	
	$\boxed{\frac{2x^2+x+2}{x(x-1)(x+1)}}$	$\Rightarrow$ SOLUCIÓN

Ejercicio: *Realiza las siguientes sumas algebraicas:*

a) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2-1}$

Ejercicio: *Realiza las siguientes sumas algebraicas:*

a) $\dfrac{2x+6}{x^2-3x}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x-1}{2x-6}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

Ejercicio: *Realiza las siguientes sumas algebraicas:*

a) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x+7}{x}+\dfrac{x-2}{x^2+x}-\dfrac{2x+1}{x+1}$

5. Ejercicios

1. Calcula las raíces de estos polinomios:

   a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

   b) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

   c) $R(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$

   d) $S(x) = x^2 - 5x - 14$

2. Realiza las operaciones y simplifica las fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{2x+6}{x^2-3x} - \dfrac{x+5}{x^2-4x+3}$

   b) $\dfrac{x+1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1}$

   c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1-x}{x^2+2x} - \dfrac{2}{x+1}$

   d) $\dfrac{2(x+3)}{x^2+2x-3} - \dfrac{3}{x+3}$

   e) $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{3}{x^2-1}$

   f) $\dfrac{2a^2}{3b} \cdot \dfrac{6b^2}{4a}$

   g) $\dfrac{2x^2+x}{6} \cdot \dfrac{8}{4x+2}$

   h) $\dfrac{5x+25}{14} \cdot \dfrac{7x+7}{10x+50}$

   i) $\dfrac{m+n}{mn-n^2} \cdot \dfrac{n^2}{m^2-n^2}$

   j) $\dfrac{2x^2-3x-2}{6x+3} \cdot \dfrac{3x+6}{x^2-4}$

3. Resuelve los siguientes ejercicios e indica que teorema has usado para resolverlo:

   a) Hallar el valor de m para que el polinomio$P(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2x + m$ sea divisible por $(x-2)$

   b) Hallar el valor de m para que el polinomio $P(x) = x^3 - 9x^2 + mx - 32$ sea divisible por $(x-4)$

   c) Calcular el valor de k para que al dividir el polinomio $P(x) = x^2 - kx + 8$ entre (x+3) nos dé resto 5

   d) Calcular los valores c y d sabiendo que el polinomio $P(x) = x^2 - cx + d$ es divisible entre $(x-3)$ y el resto de su división entre $(x-2)$ es -4

   e) Calcula un polinomio de segundo grado que tenga 1 como coeficiente principal, se anule para x= 3 y resto de su división entre $(x-1)$ sea igual a 4.

   f) Comprueba que el polnomio $P(x) = x^{10} - 1024$ tiene por factor $(x+2)$

   g) Escribe un polinomio que tenga por raíces -2 y 3

   h) Escribe un polinomio que tenga por raíces doble 1 y -3 raíz simple