

Intervalos

Índice

1. Introducción	1
2. Conjuntos de números de forma gráfica	1
3. Conjuntos de números en forma de intervalos	3
4. Conjuntos de números en forma de desigualdades	5
5. Operaciones con intervalos	6
5.1. Unión de intervalos	6
5.2. Intersección de intervalos	7
6. Ejercicios	8

1. Introducción

Todos sabemos, desde pequeños, escribir los números. Pero, ¿qué pasaría si un día la profesora o el profesor de matemáticas os pidiera que escribieras todos los números que hay entre el 0 y el 1? Vamos a probar, ¿quién se atreve?

Pues... como veis, no se pueden escribir absolutamente todos los números, de manera que, este año, aprenderemos a escribir conjuntos de números utilizando una nueva notación llamada **intervalos**.

Un intervalo es, por tanto, una forma de escribir un **conjunto de números**.

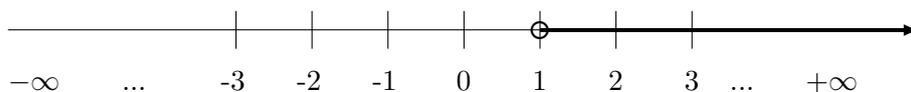
Veamos cómo se escriben estos conjuntos de números de tres formas:

1. De forma gráfica
2. En forma de intervalos
3. En forma de desigualdades

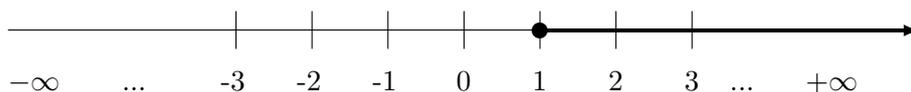
2. Conjuntos de números de forma gráfica

Para representar un intervalo de forma gráfica usamos la representación de números en la recta real, y los puntos abiertos o cerrados para incluir o no el valor extremo. Vamos a ver algunos ejemplos:

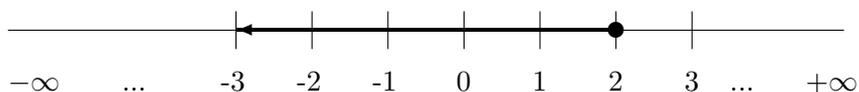
Ejemplo: Escribir todos los números mayores que 1:



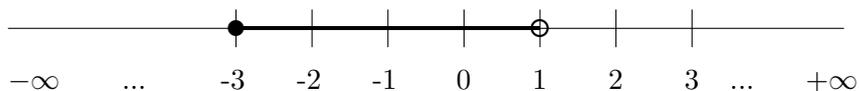
Ejemplo: Escribir todos los números mayores o iguales que 1:



Ejemplo: Escribir todos los números menores o iguales que 2:



Ejemplo: Escribir todos los números menores que 1 y mayores o iguales que -3:



1. **Ejercicio:** Representa de forma gráfica los siguientes conjuntos de números:

- a) Todos los números menores que -5
- b) Todos los números comprendidos entre 3 y 17
- c) Todos los números mayores que 4
- d) Todos los números comprendidos entre el -1 y el 7 incluido
- e) Todos los números mayores o iguales que 8 y menores que 40

3. Conjuntos de números en forma de intervalos

Lo primero que tenemos que saber para escribir un conjunto de números es el número por el que se empieza y el número por el que se acaba. El número por el que empieza el conjunto de números se llama **límite inferior**, y el número por el que acaba se llama **límite superior**. En nuestro ejemplo anterior, el límite inferior es el 0 y el límite superior es el 1.

Otra cosa que tenemos que tener clara, es si estos límites están incluidos en el conjunto de números que queremos escribir. En el ejemplo anterior, se piden los números entre el 0 y el 1, es decir que no me vale ni el 0 ni el 1 sino todos los que están en medio.

Para aclarar si los límites se incluyen o no, utilizaremos dos delimitadores que pueden ser:

- Paréntesis (,): Si el número **NO** está incluido
- Corchetes [,]: Si el número **SI** está incluido

Y que se pueden combinar entre ellos, de manera que cualquier conjunto de números se puede escribir:

(límite inferior , límite superior)
[límite inferior , límite superior]
[límite inferior , límite superior)
(límite inferior , límite superior]

De manera que según el ejemplo anterior, para escribir todos los números entre el 0 y el 1 utilizando intervalos, escribiríamos:

$$(0, 1)$$

Veamos más ejemplos:

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números menores que 1 y mayores o iguales que -3:

$$[-3, 1)$$

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números mayores que 5 y menores que 7 ambos incluidos:

$$(5, 7]$$

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números comprendidos entre el -9 y el 0:

$$(-9, 0)$$

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números mayores que 8 y menores o iguales que 16:

$$(8, 16]$$

Pero... qué pasaría si nos mandaran escribir simplemente ¿ todos los números mayores que 5?, o bien ¿ todos los números los menores o iguales que -4?, en ambos casos tan solo tenemos un límite, ¿cual es el otro?

Pues para ello utilizamos los símbolos $+\infty$ o bien $-\infty$, para indicar el número más grande y el número más pequeño de todos.

De esta manera, todos los números mayores que 5 se escribirían:

$$(5, +\infty)$$

Y todos los números menores o iguales que -4 sería:

$$(-\infty, 4]$$

Por si no quedó claro... más ejemplitos:

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números mayores que 1:

$$(1, +\infty)$$

Ejemplo: Escribe en forma de intervalos todos los números menores o iguales que 2:

$$(-\infty, 2]$$

Fijaros bien que el $+\infty$ y el $-\infty$ siempre van con paréntesis, porque realmente no son números, sino una manera de expresar un número muy grande y un número muy pequeño.

1. **Ejercicio:** Escribe mediante intervalos los siguientes conjuntos de números:

- a) Todos los números menores que -5

- b) Todos los números comprendidos entre 3 y 17

- c) Todos los números mayores que 4

- d) Todos los números comprendidos entre el -1 y el 7 incluido

- e) Todos los números comprendidos entre el 4 y el 9 ambos incluidos

- f) Todos los números mayores o iguales que 8 y menores que 40

4. Conjuntos de números en forma de desigualdades

Una desigualdad es una manera de expresar intervalos que usa los símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Menor: } < \\ \text{Mayor: } > \\ \text{Menor o igual: } \leq \\ \text{Mayor o igual: } \geq \end{array} \right\} \text{ Su sintaxis es: } \left\{ \begin{array}{l} \text{límite inferior } \boxed{< \text{ o } \leq} x \boxed{< \text{ o } \leq} \text{ límite superior} \\ x \boxed{< \text{ o } \leq} \text{ límite superior} \\ x \boxed{> \text{ o } \geq} \text{ límite inferior} \end{array} \right.$$

Veamos los ejemplos anteriores con esta notación:

Ejemplo: Escribe en forma de desigualdades todos los números mayores que 1:

$$x > 1$$

Ejemplo: Escribe en forma de desigualdades todos los números menores o iguales que 2:

$$x \leq -2$$

Ejemplo: Escribe en forma de desigualdades todos los números menores que 1 y mayores o iguales que -3:

$$-3 \leq x < 1$$

Ejercicio: Escribe los siguientes conjuntos de números mediante desigualdades:

- Todos los números menores que -5
- Todos los números comprendidos entre 3 y 17
- Todos los números mayores que 4
- Todos los números comprendidos entre el -1 y el 7 incluido
- Todos los números comprendidos entre el 4 y el 9 ambos incluidos
- Todos los números mayores o iguales que 8 y menores que 40

5. Operaciones con intervalos

Los intervalos, se pueden ver como una representación de un conjunto de números, por lo tanto, se pueden realizar con ellos las mismas operaciones que se realizan con los conjuntos numéricos. En esta sección veremos:

- La unión de dos o más intervalos
- La intersección de dos o más intervalos

5.1. Unión de intervalos

Como siempre, lo primero es saber qué significa la palabra “unión”. Unir dos cosas es... juntarlas, por lo tanto si unimos dos intervalos lo que estamos haciendo es juntar los elementos que tienen teniendo en cuenta que los que estén repetidos solo los ponemos una vez (es decir, que aparezcan en los dos intervalos).

Así, la unión de dos intervalos da como resultado un nuevo intervalo formado por todos los elementos que aparecen en ambos pero sin repetirlos.

La operación unión se representa con el símbolo \cup .

Si A y B son dos intervalos, entonces se define la unión $A \cup B$ como el conjunto de números x que están en el intervalo A o en el intervalo B .

$$A \cup B = \{x/x \in A \cup x \in B \mid x \in A \cup B\}$$

Y ahora, un ejemplo:

- Si $A = [0, 1]$ y $B = [1, 2]$, entonces $A \cup B = [0, 2]$
- Si $A = (0, 1]$ y $B = [1, 2)$, entonces $A \cup B = (0, 2)$
- Si $A = [0, 1)$ y $B = [1, 2)$, entonces $A \cup B = [0, 2) - \{1\}$

Ejercicio: Indica cual es el resultado de las siguientes uniones de intervalos escribiendo el resultado de tres formas.

a) Todos los números menores que -5 y todos los números entre el 2 y el 8 incluidos

b) $A = [-2, 7]$ y $B = [-1, 3]$

c) $(-\infty, 2) \cup [2, 7)$

5.2. Intersección de intervalos

Veamos ahora la otra operación con intervalos que utilizaremos durante este curso: la intersección.

Si A y B son dos intervalos, se define la intersección de A y B , y se escribe $A \cap B$, como el conjunto de elementos x que están en el intervalo A y en el intervalo B .

$$A \cap B = \{x/x \in A \cap x \in B\}$$

Es decir, la intersección nos dice los números que tienen en común los conjuntos A y B .

Ejemplitos!!!

- Si $A = [0, 2]$ y $B = [1, 3]$, entonces $A \cap B = [1, 2]$
- Si $A = (0, 2]$ y $B = (1, 3)$, entonces $A \cap B = (1, 2]$
- Si $A = [0, 1)$ y $B = [1, 3]$, entonces $A \cap B = \emptyset$ Este es el símbolo de conjunto vacío, es decir, A y B no tienen ningún elemento en común

Ejercicio: Indica cual es el resultado de las siguientes intersecciones de intervalos escribiendo el resultado de tres formas.

a) $(-\infty, 5) \cap (-3, \infty)$

b) $A = [-2, 7]$ y $B = [-1, 3]$

c) $(-\infty, 2) \cap [2, 7)$

6. Ejercicios

1. Escribe de tres formas distintas los siguientes conjuntos de números:

- Todos los números estrictamente mayores que -5
- Todos los números mayores que $\sqrt{2}$ y menores que 8
- Todos los números menores que $-1/4$ y mayores o iguales que $-1/2$
- Todos los números menores o iguales que -7
- Todos los números mayores o iguales que 3 y todos los números menores o iguales que -3

2. Escribe en lenguaje natural los siguientes intervalos de números. Representalos también en forma gráfica y usando intervalos.

- $\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 5\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / 3 < x \cup x < 4\}$
- $\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

3. Encuentra un número natural que cumpla las siguientes condiciones:

- $\{x \in \mathbb{N} / x < -2\}$
- $\{x \in \mathbb{N} / x > 5\}$
- $\{x \in \mathbb{N} / -\pi < x \leq \sqrt{2}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq \sqrt{25}\}$

4. Realiza las siguientes operaciones con intervalos:

- $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$
- $(-\infty, 7) \cap (3, \infty)$
- $(-\infty, 7) \cup (3, \infty)$

5. Siendo: $A = (-\infty, 2]$; $B = (-2, 2]$ y $C = [1, 4)$, calcula:

- | | |
|---------------|----------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $A \cap C$ |
| b) $A \cup C$ | d) $A \cap B \cap C$ |

6. Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(-3, 3) \cap [-1, 2) = [-1, 2)$ | c) $[-4, 4] \cap (-1, 4] = (-1, 4]$ |
| b) $(-3, 3) \cup (-1, 5) = [-3, 3)$ | d) $[-5, 3] \cap (-1, 4) = (-1, 4)$ |

7. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x < 4\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 5\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 8\}$$

Calcula:

- | | |
|------------------------|----------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $A \cap C$ |
| b) $(A \cup B) \cap C$ | d) $A \cap B \cap C$ |

8. Dados los conjuntos:

$$A = (-3, 7] \quad B = [-5, 5] \quad C = (2, 8])$$

Calcula:

- | | |
|---------------|------------------------|
| a) $A \cup B$ | c) $(A \cup B) \cap C$ |
| b) $A \cap C$ | d) $A \cap (B \cup C)$ |