Ámbito científico tecnolóxico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 3

Unidade didáctica 8

Ecuacións de segundo grao
Sistemas de ecuacións

Índice

1. Introdución

1.1 Descrición da unidade didáctica

Comézase co estudo das funcións cuadráticas (características e representación gráfica) en relación co número de solucións das ecuacións de segundo grao.

Abórdase logo a resolución de ecuacións de segundo grao completas e incompletas, usando a fórmula xeral ou outros métodos, cando sexa posible, e discútese a existencia de unha, dúas ou ningunha solución segundo o valor do discriminante. Despois estúdanse os métodos de resolución de sistemas de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas, incluíndo o método gráfico, e os casos de compatibilidade e incompatibilidade que poidan existir.

Finalmente proponse un amplo abano de problemas que se poden resolver mediante ecuacións de primeiro grao, de segundo grao e de sistemas de ecuacións lineais, para familiarizarse cos métodos alxébricos de aplicación nunha gran variedade de situacións.

1.2 Coñecementos previos

- Resolución de ecuacións de primeiro grao.
- Representación gráfica de funcións lineais.
- Interpretación das características das gráficas de funcións.
- Interpretar e traducir información á linguaxe alxébrica.
- Efectuar operacións con expresións alxébricas.

1.3 Obxectivos didácticos

- Relacionar as funcións de segundo grao coa súa representación gráfica
- Identificar as características máis salientables na gráfica da parábola.
- Resolver ecuacións de segundo grao completas e incompletas, e comprobar as solucións, se as hai.
- Relacionar o número de solucións dunha ecuación de segundo grao co valor do discriminante e co número de puntos de corte co eixe OX.
- Usar as ecuacións de segundo grao para calcular o tempo que tarda un móbil con aceleración en alcanzar unha certa posición, despexándoo da ecuación $s = so + vot + ½ at^2$.
- Resolver problemas mediante a formulación e a resolución da ecuación de segundo grao correspondente, e interpretar a pertinencia ou non das solucións obtidas.
- Interpretar graficamente a solución dun sistema de ecuacións como o punto de corte das rectas asociadas.
- Formular sistemas de ecuacións e resolvelos en problemas de encontro e alcance de móbiles, e dos ámbitos socioeconómico e científico.

2. Secuencia de contidos e actividades

2.1 A función cuadrática

As funcións cuadráticas son as que se expresan mediante un polinomio de grao 2:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ (con } a \neq 0\text{).}$$

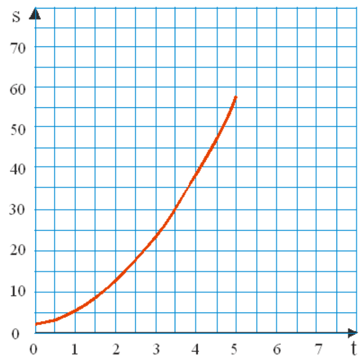
A gráfica dunha función cuadrática é sempre unha parábola.

Vexámolo cun exemplo:

Un móbil parte da posición s_o = 2 m con velocidade inicial v_o = 1 m/s e aceleración a = 4 m/s^2. Debuxe a súa gráfica s/t (posición/tempo).

Solución: $s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \;\rightarrow\; s = 2 + 1.t + \frac{1}{2} 4t^2 = 2 + t + 2t^2$

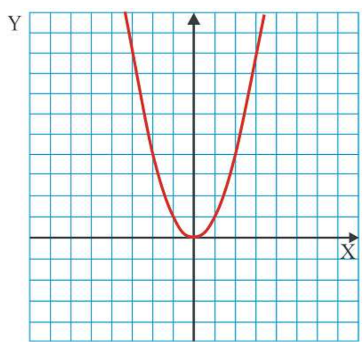
s = 2 + t + 2 t^2	
t	s
0	2
1	5
2	12
3	23
4	38
5	57



A gráfica obtida é unha *parábola* (exactamente un arco de parábola).

A función cuadrática máis sinxela é $\boldsymbol{y = x^2}$**.** Vexamos a súa gráfica:

y = x^2	
x	y
- 3	9
- 2	4
- 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



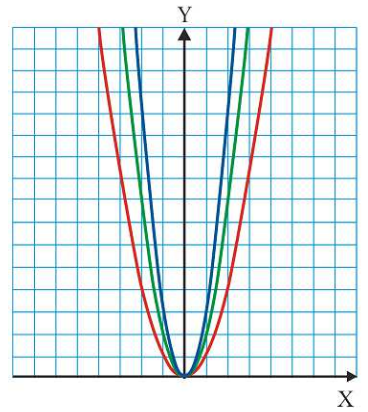
Na gráfica anterior observamos:

- O punto máis baixo da curva é, neste caso, o punto de coordenadas (0, 0). A este punto máis baixo chámaselle vértice da parábola.
- A curva é simétrica respecto do eixe OY.
- A función é decrecente para valores de x menores que cero ($x < 0$) e crecente para valores positivos de x ($x > 0$).
- A curva é convexa: está aberta cara arriba (ten forma de V).

2.1.1 Gráfica das funcións de tipo $y = ax^2$

Vexamos agora as gráficas das funcións $y = 2x^2$ (verde) e $y = 3x^2$ (azul), comparándoas coa anterior (vermella):

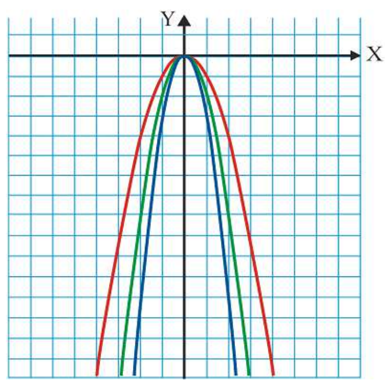
$y = 2x^2$		$y = 3x^2$	
x	y	x	y
-3	18	- 3	27
- 2	8	- 2	12
- 1	2	- 1	3
0	0	0	0
1	2	1	3
2	8	2	12
3	18	3	27



Todas as parábolas teñen o vértice no mesmo punto (0,0) e son convexas (forma de V), pero canto maior é o valor do coeficiente *a*, máis estreita é a curva.

Que ocorre cando o coeficiente a é negativo? Fíxese:

$y = - x^2$		$y = - 2x^2$		$y = - 3x^2$	
x	y	x	y	x	y
- 3	- 9	- 3	- 3	- 9	- 3
- 2	- 4	- 2	- 2	- 4	- 2
- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
0	0	0	0	0	0
1	-1	1	1	-1	1
2	-4	2	2	-4	2
3	-9	3	3	-9	3



Xa ve o resultado: se o coeficiente *a* é negativo, a parábola é *cóncava*, é dicir, está aberta cara a abaixo (ten forma de Λ). O vértice da parábola agora é o punto máis alto dela.

Actividades propostas

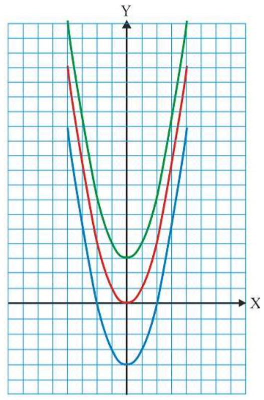
S1. Das funcións cuadráticas seguintes, cales son cóncavas e cales convexas?

$y = -3/2\ x^2$	$y = 3/5\ x^2$	$y = 7\ x^2$	$y = -\ 0,32\ x^2$

2.1.2 Gráfica das funcións de tipo $y = ax^2 + c$

Comparemos entre si as funcións $y = x^2 + 3$ (verde), $y = x^2 – 4$ (azul) e $y = x^2$ (vermello):

$y = x^2$		$y = x^2 + 3$		$y = x^2 - 4$	
x	y	x	y	x	y
- 3	9	- 3	12	- 2	0
- 2	4	- 2	7	- 1	- 3
- 1	1	- 1	4	0	- 4
0	0	0	3	1	- 3
1	1	1	4	2	0
2	4	2	7	3	5
3	9	3	12	4	12



A forma das tres parábolas é igual, pero $y = x^2 + 3$ está desprazada cara a arriba tres unidades, e $y = x^2 - 4$ está catro unidades cara a abaixo respecto da parábola $y = x^2$.

Daquela, o parámetro libre *c* ten como efecto subir c unidades a parábola, se c é positivo, e baixala c unidades se é negativo.

Actividades propostas

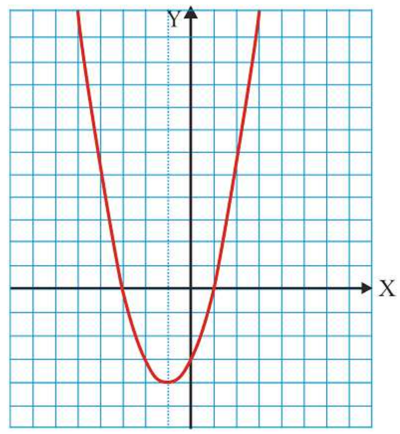
S2. Comprobe que o efecto do parámetro c nas parábolas de tipo $y = ax^2 + c$ é desprazalas cara a arriba ou abaixo, debuxando a gráfica das parábolas $y = 2x^2 + 3$, $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 - 3$

S3. Compare as gráficas das seguintes funcións: $y = -\ x^2$, $y = -\ x^2 + 4$. Que observa?

2.1.3 Gráfica da función cuadrática completa $y = ax^2 + bx + c$

Representemos graficamente a seguinte parábola: $y = x^2 + 2x - 3$:

$y = x^2 + 2x - 3$	
x	y
- 3	0
- 2	- 3
- 1	- 4
0	-3
1	0
2	5
3	12



Como $a > 0$, a parábola é convexa (aberta cara a arriba).

Pode demostrarse que, para calquera parábola, a coordenada x do vértice vén dada pola expresión:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Isto quere dicir que se *a* e *b* teñen o mesmo signo, o eixe de simetría da parábola e o vértice estarán desprazados cara á esquerda do eixe OY (como no exemplo anterior), e se teñen signos contrarios estarán desprazados cara á dereita. O parámetro *c* xoga o mesmo papel de subir ou baixar a gráfica que xa vimos antes.

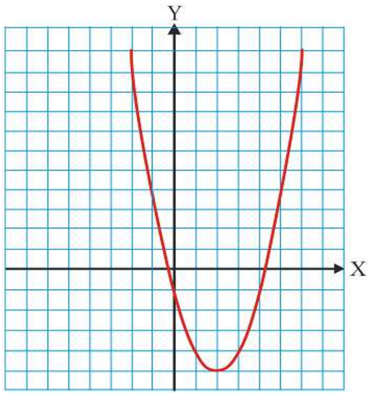
Para representarmos unha parábola convén calcularmos primeiro a posición do seu vértice, e logo completar a táboa de valores x-y dándolle a x valores simétricos respecto de x_v.

Actividades resoltas

Actividade 1. Representar a función cuadrática $y = x^2 - 4x - 1$

Solución	Solución: a coordenada x_v do vértice é: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$ Así que lle damos a x os valores 2, 2 ± 1, 2 ± 2, 2 ± 3, etc.

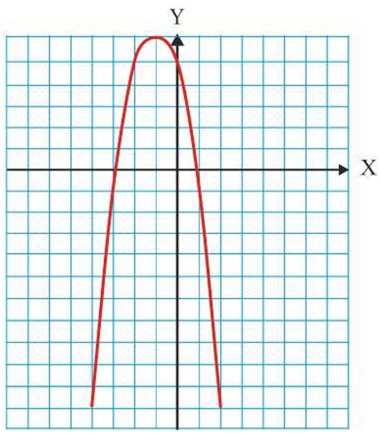
y = x2 - 4x - 1	
x	y
- 1	4
0	- 1
1	- 4
xv = 2	yv = - 5
3	- 4
4	- 1
5	4



Actividade 2. Representar a parábola y = - 2x^2 - 4x + 5

Solución	Coordenada x do vértice: $$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{-2.2} = -1$$

y = - 2x^2 - 4x + 5	
x	y
- 4	-11
- 3	-1
- 2	5
x_v = - 1	y_v = 7
0	5
1	1
2	11



Observe que como o coeficiente *a* é negativo, a parábola é cóncava (aberta cara a abaixo), e que como *a* e *b* teñen o mesmo signo, o vértice está á esquerda do eixe OY.

Actividades propostas

S4. Calcule as coordenadas do vértice das parábolas:

y = x2 - 8	y = x^2- x + 5	y = 1/2 x^2 - 4x + 1	y = - x^2 - 2x + 4	y = 3x^2 + 6x - 1

S5. Representar graficamente as funcións cuadráticas seguintes: y = x^2 - 9x;
y = x^2 - 6x + 1; y = x^2 – 2.

S6. Sen debuxar a gráfica, determine se o eixe de simetría e o vértice das parábolas están á esquerda ou á dereita do eixe OY: y = x^2- 3x + 5; y = x^2 - 4x.

2.2 A ecuación de segundo grao

Temos para resolver o seguinte problema de movemento uniformemente acelerado:

Un móbil parte da posición inicial s_o = 3 m cunha velocidade de 10 m/s e aceleración 2 m/s^2. Canto tempo tardará en pasar pola posición s = 78 m?

Solución:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \;\rightarrow\; 78 = 3 + 10t + \frac{1}{2} 2t^2$$

Hai que despexar *t* e deixalo só nun membro pero... non sabemos facelo! Por iso temos que aprender agora a resolver ecuacións de segundo grao.

En que puntos cortan as parábolas o eixe OX? Podémolo saber sen as representar graficamente? Pois si que podemos: neses puntos a coordenada *y* vale cero; xa que logo:

$$y = 0 = ax^2 + bx + c$$

Así que para saber o valor de *x* nos puntos de corte atopámonos de novo co problema de resolver unha ecuación de segundo grao. Vexamos xa como se fai.

2.2.1 Resolución da ecuación de segundo grao $ax^2 + bx + c = 0$

Unha ecuación de segundo grao é *completa* cando os coeficientes *a*, *b* e *c* son todos distintos de cero. Se os coeficientes *b* ou *c*, ou os dous, son nulos, a ecuación chámase *incompleta*.

As solucións da ecuación de segundo grao completa veñen dadas pola expresión (que non deducimos):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{sempre } \; a \neq 0)$$

O dobre signo ± diante da raíz cadrada quere dicir que en xeral hai dúas solucións:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Exemplo. Resolver a ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$

  Solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

  As solucións son $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$. Podémolas comprobar substituíndo estes valores na ecuación e vendo se realmente dan cero:

  $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 = 4$ → $4^2 - 6.4 + 8 = 16 - 24 + 8 = - 8 + 8 = 0$ Solución correcta.

  $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_2 = 2$ → $2^2 - 6.2 + 8 = 4 - 12 + 8 = - 8 + 8 = 0$ Solución correcta.

Actividades propostas

S7. Resolver as seguintes ecuacións de segundo grao completas:

$x^2 - 5x + 6 = 0$	$2x^2 - 12x + 10 = 0$	$4x^2 + 4x - 3 = 0$	$x^2 + 9x - 10 = 0$

2.2.2 Número de solucións dunha ecuación de segundo grao

Unha ecuación de segundo grao pode ter dúas solucións, unha ou ningunha, e iso depende do valor do *discriminante*, a expresión $b^2 - 4ac$, que é a parte vermella que está dentro da raíz cadrada na ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se o discriminante é positivo, $b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten dúas solucións distintas; se o discriminante vale cero a ecuación ten unha solución (ou dúas de igual valor, que vén sendo o mesmo); e se o discriminante é negativo, $b^2 - 4ac < 0$, a raíz cadrada non se pode calcular (con números reais) e a ecuación non ten ningunha solución.

- Exemplos.
  - A ecuación $x^2 + 3x + 10 = 0$ non ten ningunha solución, porque:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.10}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-31}}{2} \quad \textit{non ten solución}$$

  - A ecuación $2x^2 + 12x + 18 = 0$ ten unha soa solución, porque:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4.2.18}}{2.2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \frac{-12 \pm 0}{4} = -3$$

  A solución única x = - 3 tamén se chama *solución dobre*.

  - A ecuación $3x^2 + 3x - 36 = 0$ ten dúas solucións distintas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.3.(-36)}}{2.3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 432}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{6}$$

$$= \frac{-3 \pm 21}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + 21}{6} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-3 - 21}{6} = -4 \end{cases}$$

Actividades propostas

S8. Determine, coa axuda do discriminante, cantas solucións ten cada ecuación:

$3x^2 - 6x + 3 = 0$	$x^2 + x - 3 = 0$	$x^2 + x + 3 = 0$	$-x^2 - 2x - 3 = 0$	$2x^2 + 5x + 1 = 0$

2.2.3 Ecuacións de segundo grao incompletas

Son as ecuacións nas que os termos b ou c valen 0.

Ecuacións de tipo $ax^2 + c = 0$

Son o caso no que *b* = 0. O método máis sinxelo de resolución é despexar a incógnita *x*:

$$ax^2 + c = 0 \qquad ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Se o valor de $\frac{-c}{a}$ é positivo a raíz pódese efectuar e a ecuación ten dúas solucións, pero se o cociente é negativo, a raíz non existe e a ecuación non ten ningunha solución real.

- *Exemplo*. Resolver a ecuación $2x^2 - 32 = 0$.

$$2x^2 - 32 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 32 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{32}{2} = 16 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{16} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

- *Exemplo*. Resolver a ecuación $x^2 + 1 = 0$.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ ....Non ten solución real.}$$

Ecuacións de tipo $ax^2 + bx = 0$

Son o caso cando *c* = 0. O máis sinxelo é sacar factor común *x*:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0$$

Temos a multiplicación de dous factores, x e (ax + b). A única forma de que multiplicando dous factores sexa cero é que un deles, ou os dous, sexan nulos:

$$x(ax+b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \;\Rightarrow\; ax = -b \;\Rightarrow\; x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Polo tanto este tipo de ecuacións incompletas sempre ten dúas solucións, unha delas x = 0.

- *Exemplo*. Resolver a ecuación $5x^2 - 125x = 0$.

$$5x^2 - 125x = 0 \;\Rightarrow\; x(5x - 125) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 125 = 0 \;\Rightarrow\; 5x = 125 \;\Rightarrow\; x = \frac{125}{5} = 25 \end{cases}$$

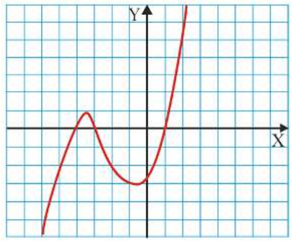
Actividades propostas

S9. Resolva as ecuacións incompletas seguintes:

$3x^2 - 27 = 0$	$3/2\, x^2 + 15 = 0$	$1/3\, x^2 - 25/3 = 0$	$x^2 - 9/4 = 0$
$-2x^2 + 50x = 0$	$13x^2 + 52x = 0$	$x^2 + x = 0$	

2.2.4 Solucións dunha ecuación e puntos de corte co eixe OX

Na figura está representada a gráfica dunha certa función f(x). Fíxese en que nos puntos en que a curva corta o eixe OX a coordenada *y* vale cero, é dicir, nestes puntos ocorre que f(x) = 0 e, daquela, os valores da coordenada *x* son as solucións da ecuación f(x) = 0. No caso da función da figura as solucións son x = - 4, x = - 3 e x = 1: a ecuación ten tres solucións.



Coas funcións cuadráticas ocorre igual. Vexamos algúns exemplos.

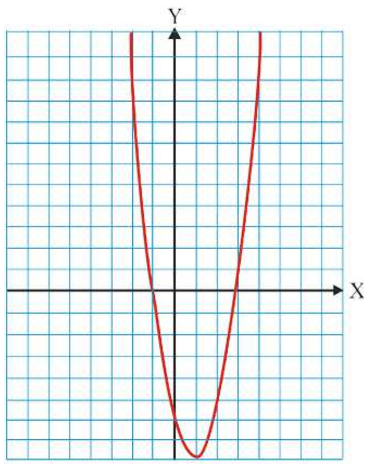
- *Exemplo 1*. f(x) = y = $2x^2$ - 4x - 6.

  Nos puntos de corte co eixe OX pasa que $2x^2$ - 4x - 6 = 0; a solución desta ecuación é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.(-6)}}{2.2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+8}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{4-8}{4} = -1 \end{cases}$$

  A ecuación ten dúas solucións, así que a parábola ten que ter dous puntos de corte co eixe OX: son os puntos (-1,0) e (3,0). Compróbeo vendo a gráfica da función:

y = $2x^2$ - 4x - 6	
x	y
- 3	14
- 2	10
- 1	0
0	- 6
1	- 8
2	- 6
3	0
4	10



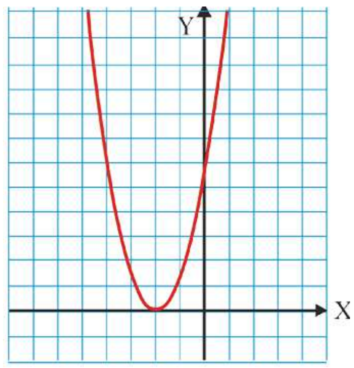
- *Exemplo 2*. Fagamos o mesmo coa función y = 3/$2x^2$ + 6x + 6.

  Primeiro resolvemos a ecuación asociada, 3/$2x^2$ + 6x + 6 = 0.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6}}{2.\frac{3}{2}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{3} = \frac{-6 \pm 0}{3} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6+0}{3} = -2 \\ x_2 = \frac{-6+0}{3} = -2 \end{cases}$$

Só hai unha solución (ou dúas iguais), polo tanto a parábola corta ao eixe OX nun único punto. Fíxese na gráfica desta parábola:

$y = 3/2\ x^2 + 6x + 6$	
x	y
- 4	6
- 3	3/2
- 2	0
- 1	3/2
0	6
1	27/2



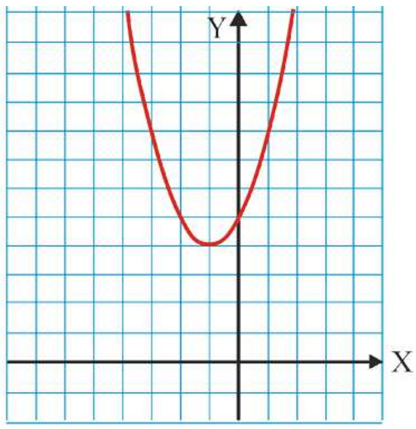
- *Exemplo 3*. Por último, unha parábola que non corta o eixe OX: $y = x^2 + 2x + 5$.

Achamos os puntos de corte resolvendo a ecuación.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

O discriminante é negativo así que non ten solucións, logo non hai puntos de corte co eixe OX. Fíxese como é a gráfica da parábola:

$y = x^2 + 2x + 5$	
x	y
- 4	13
- 3	8
- 2	5
- 1	4
0	5
1	8
2	13



2.2.5 Resolución de problemas utilizando ecuacións de segundo grao

Por fin podemos resolver xa o problema co que iniciamos esta sección: cando pasará o móbil pola posición s = 78 m? (vaia atrás e léao novamente).

Solución:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 78 = 3 + 10t + \frac{1}{2} 2 t^2 \rightarrow t^2 + 10t - 75 = 0$$

Resolvendo a ecuación:

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 300}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{-10 \pm 20}{2} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{-10 - 20}{2} = -15 \\ t_2 = \dfrac{-10 + 20}{2} = 5 \end{cases}$$

A primeira solución (t = - 15 s) non ten sentido físico, ao non existiren tempos negativos, así que *a rexeitamos*. A solución válida é que aos 5 s o móbil pasará pola posición 78 m.

As ecuacións de segundo grao permiten resolver problemas de móbiles e de moitos outros campos da ciencia e da vida cotiá. Vexamos uns cantos.

- *Exemplo*. Desde unha altura de 100 m lanzamos verticalmente cara abaixo un corpo cunha velocidade inicial de 10 m/s. Canto tempo tarda en chegar ao chan?
  - Solución: o movemento é uniformemente acelerado, usamos a ecuación da posición:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 100 = 10t + \frac{1}{2} 9{,}8 . t^2 \rightarrow 4.9t^2 + 10t - 100 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.4{,}9.(-100)}}{2.4{,}9} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1960}}{9.8} = \frac{-10 \pm 45.39}{9.8}$$

$$t = \begin{cases} t_1 = 3.61 s \\ t_2 = -5.65\ s\ \ (non\ vale) \end{cases}$$

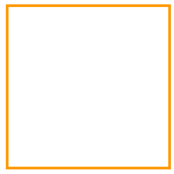
- *Exemplo*. O produto dun número natural polo seguinte é 272. Cal é ese número?
  - Solución: sexa *x* o número buscado. Daquela x(x+1) = 272; facendo as operacións temos:

$$x(x+1) = 272 \rightarrow x^2 + x = 272 \rightarrow x^2 + x - 272 = 0$$

Resolvendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-272)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1089}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 + 33}{2} = 16 \\ x_2 = \dfrac{-1 - 33}{2} = -17 \end{cases}$$

O número natural buscado é 16. A solución x_2 = -17 é dun número enteiro.



- *Exemplo*. Nun cadrado a área é igual ao dobre do perímetro. Cando mide o lado do cadrado?
  - Solución: sexa *x* a lonxitude do lado do cadrado.

    Área = x^2; Perímetro = x + x + x + x = 4x

    Condición do problema: área = 2.perímetro → $x^2 = 2.4x$;

    $$x^2 = 8x \rightarrow x^2 - 8x = 0$$

    É unha ecuación incompleta.

    $$x(x-8) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 8 = 0 \quad x = 8 \end{cases}$$

    O lado do cadrado mide 8.

- *Exemplo*. Un almacén mercou un lote de caixas e pagou por todas elas 300 euros. Cos mesmos cartos podería comprar dez caixas máis se cada unha custase 5 euros menos. Cantas caixas mercou?
  - Solución: sexa *x* o número de caixas. O prezo de cada caixa é $\frac{300}{x}$.

    Condición do problema:

    $$300 = (x+10) \times \left(\frac{300}{x} - 5\right)$$

    Facendo as operacións:

    $$300 = x \times \frac{300}{x} - x5 + \frac{10 \times 300}{x} - 50 \rightarrow 300 = 300 - 5x + \frac{3000}{x} - 50$$

    $$300 - 300 + 50 = \frac{3000}{x} - 5x \rightarrow 50 = \frac{3000 - 5x^2}{x} \rightarrow 50x = 3000 - 5x^2$$

    $$5x^2 + 50x - 300 = 0$$

    Resolvendo a ecuación de segundo grao:

    $$x = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4.5.(-300)}}{2.5} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 60000}}{10} = \frac{-50 \pm 250}{10}$$

    $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-50 + 250}{10} = 20 \\ x_2 = \dfrac{-50 - 250}{10} = -30 \ (non\ vale) \end{cases}$$

    Comprou 20 caixas a 15 euros cada unha.

Actividades propostas

S10. Reparta o número 10 en dous sumandos de xeito que a suma dos seus cadrados sexa 50.

S11. Se ao triplo dun número se lle suma o seu cadrado obtense 88. Cal é o número?

S12. Ache a idade dunha persoa sabendo que se ao seu cadrado se lle resta o triplo da idade resulta nove veces esta.

S13. Un rectángulo ten 24 m de perímetro e 35 m^2 de área. Ache as dimensións do rectángulo.

S14. Determine o perímetro dun triángulo rectángulo isóscele cuxa área é 12 m^2.

S15. Un campo de fútbol mide 30 m máis de longo que de ancho; a súa área é de 7.000 m^2. Canto miden os lados do campo?

S16. Dous números diferéncianse en sete unidades, e o seu produto é 60. Cales son eses números?

S17. Nun triángulo rectángulo de 24 m de perímetro, a lonxitude dun cateto é igual aos 3/4 do outro. Determine as dimensións do triángulo.

S18. O Instituto regala 525 euros para os repartir entre o alumnado de ESA. Como 25 alumnos non asisten hoxe á clase, cada un dos presentes obtivo 0,50 euros máis. Cantos alumnos hai en total en ESA?

2.3 Sistemas de ecuacións lineais

Que son os sistemas de ecuacións lineais?

Unha ecuación é *lineal* cando é de grao 1 respecto de todas as incógnitas, e non hai produtos nin divisións entre elas; así,

$3x + 2y - 8 = 0$ é unha ecuación lineal.

$3x^2 - 2y - 5 = 0$ non é unha ecuación lineal.

$3xy + 8y = 8$ tampouco é unha ecuación lineal.

Un sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas ten a forma xeral:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Onde x e y son as incógnitas, e a, b, c, a', b', c' son os coeficientes e termos independentes (números normalmente).

Resolver o sistema de ecuacións lineais consiste en atopar os valores das incógnitas que fan certas as dúas ecuacións simultaneamente. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Neste sistema a solución é x = 1 e y = 2, xa que fan verdadeiras as dúas igualdades:

$$\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

A maioría das veces os sistemas de ecuacións teñen unha única solución (un valor para cada incógnita), pero pode ocorrer tamén que o sistema non teña ningunha solución e mesmo que teña infinitas. Para resolver algúns problemas de móbiles precisamos os sistemas de ecuacións lineais. Vexamos un exemplo:

- Un coche está na posición inicial $s_o = 300$ m e móvese a 20 m/s. Un motorista está inicialmente na posición 10 m e persegue o coche cunha velocidade de 25 m/s. Onde e cando o alcanza?

  – *Solución*.

  Datos do coche (A): $s_o = 300$, $v_a = 20$

  Datos da moto (B): $s_o = 10$, $v_b = 25$

  Aplicamos a ecuación da posición do movemento uniforme ($s = s_o + v.t$) aos dous móbiles: $s_a = 300 + 20.t$; $s_b = 10 + 25.t$

No momento do alcance, os dous móbiles están na mesma posición, polo tanto a condición será $\mathbf{s_a = s_b}$. Reunindo todas as ecuacións, temos tres incógnitas (s_a, s_b, t) e tres ecuacións: isto é un sistema de ecuacións lineais.

$$\begin{cases} s_a = 300 + 20t \\ s_b = 10 + 25t \\ s_a = s_b \end{cases}$$

No que segue aprenderemos como resolvelos.

2.3.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais

Hai catro métodos (ou técnicas) de resolución dun sistema: substitución, igualación, redución e representación gráfica

Método de substitución

Despexamos unha incógnita nunha ecuación e substituímos o seu valor na outra ecuación.

- *Exemplo.*

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

A incógnita máis doada de despexar é a *y* da primeira ecuación:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = 4 - 2x \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ 3x - 4(4 - 2x) = -5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 16 + 8x = -5 \Rightarrow$$

$$11x = -5 + 16 \Rightarrow x = \frac{11}{11} = 1$$

E agora substituímos este valor de *x* en calquera das ecuacións para despexar a outra incógnita; o máis fácil é facelo na ecuación y = 4 - 2x:

$$y = 4 - 2x = 4 - 2.1 = 4 - 2 = 2$$

A solución do sistema é x = 1, y = 2.

Método de igualación

Despexamos a mesma incógnita nas dúas ecuacións e logo igualamos os resultados.

- *Exemplo:*

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 - y}{2} \\ x = \dfrac{-5 + 4y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{4 - y}{2} = \frac{-5 + 4y}{3}$$

Multiplicamos en cruz:

$$3(4-y)=2(-5+4y) \rightarrow 12-3y=-10+8y \rightarrow$$

$$-3y-8y=-10-12 \rightarrow -11y=-22$$

$$y=\frac{-22}{-11}=2$$

E o valor de y = 2 obtido substituímolo en calquera das ecuacións do principio; neste caso o máis doado é facelo nesta ecuación:

$$x=\frac{4-y}{2}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Obtemos a mesma solución que co método da pregunta anterior, como é lóxico.

Método de redución

Neste método multiplicamos as dúas ecuacións por números adecuados de xeito que os coeficientes dunha das incógnitas teñan valores opostos nas dúas ecuacións.

- Vexamos como se fai co mesmo sistema anterior:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$$

Imos conseguir que os coeficientes das y teñan valores opostos nas dúas ecuacións. Para iso multiplicamos a primeira ecuación por 4 e a segunda por 1:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-4y=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x+4y=16 \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$$

E agora sumamos as dúas ecuacións membro a membro:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 8x+4y=16 \\ 3x-4y=-5 \end{cases} \\ \hline 11x+0=11 \end{array} \rightarrow 11x=11 \rightarrow x=\frac{11}{11}=1$$

E o derradeiro paso é substituír este valor de x = 1 en calquera das ecuacións anteriores para calcular o valor de y; por exemplo, en 2x + y = 4:

$$2x+y=4 \rightarrow 2.1+y=4 \rightarrow y=4-2=2$$

O sistema está resolto.

Interpretación gráfica da solución dun sistema de ecuacións

Os métodos de substitución, igualación e redución son métodos alxébricos, e son os que usamos habitualmente. Pero hai un cuarto xeito de achar a solución (ás veces menos preciso), o método gráfico.

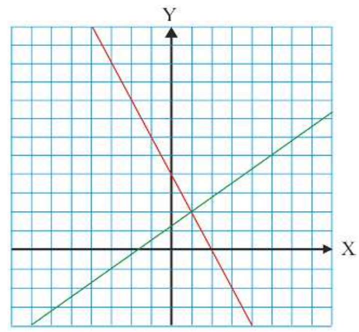
Se en cada ecuación do sistema despexamos a *y* obteremos dúas funcións lineais. A representación gráfica desas funcións son dúas liñas rectas, que se cortarán nun punto: as coordenadas deste punto son os valores de *x* e *y* da solución do sistema, xa que nese punto os valores de *x* e *y* satisfacen simultaneamente as dúas ecuacións.

- *Exemplo*. Sexa o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ -4y = -5 - 3x \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{5+3x}{4}$$

Facemos as táboas de valores x,y para as dúas funcións lineais obtidas e representamos:

y = 4 - 2x		$y = \frac{5+3x}{4}$	
x	y	x	y
-3	10	-3	-1
4	4	1	2



O punto de corte das rectas é o (1,2), así que a solución do sistema é x = 1, y = 2

Que ocorrería se as dúas rectas resultasen ser paralelas? Non habería punto de corte e o sistema de ecuacións non tería ningunha solución: sería un sistema *incompatible*.

Actividades propostas

S19. Resolva os sistemas de ecuacións seguintes polos tres métodos indicados: substitución, igualación e redución.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$

S20. Calcule graficamente a solución dos sistemas:

$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

2.3.2 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Resolvamos agora o problema da moto que alcanza ao coche. As ecuacións eran:

$$\begin{cases} s_a = 300 + 20t \\ s_b = 10 + 25t \\ s_a = s_b \end{cases}$$

Despexamos s_a da terceira ecuación (de feito xa está despexada) e substituímos o seu valor nas outras dúas ecuacións:

$$\begin{cases} s_b = 300 + 20t \\ s_b = 10 + 25t \\ \ldots \end{cases}$$

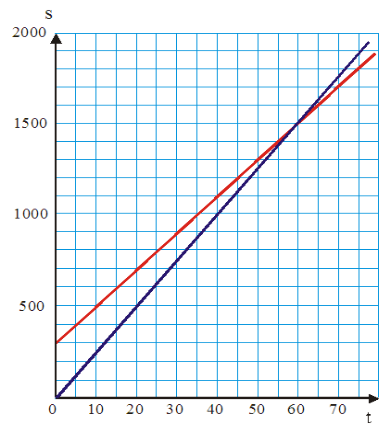
Resolvemos polo método de igualación, despexando nas dúas ecuacións s_b (en realidade xa están despexadas):

$$300 + 20t = 10 + 25t \;\rightarrow\; 20t - 25t = 10 - 300 \;\rightarrow\; -5t = -290 \;\rightarrow\; t = \frac{-290}{-5} = 58\ s$$

e $s_b = 300 + 20.t = 300 + 20.58 = 1.460$ metros.

Graficamente:

$s_a = 300 + 20.t$		$s_b = 10 + 25.t$	
t	s_a	t	s_b
0	300	0	10
20	700	20	510
40	1100	40	1010
60	1500	60	1510
80	1900	80	2010



Actividades resoltas

Actividade 1. Nun exame hai dez preguntas. Por cada unha ben contestada danme dous puntos, e por cada pregunta mal contestada quítanme un punto. No exame saquei un 8. Cantas preguntas fallei?

Solución	Preguntas acertadas = x; preguntas falladas = y As condicións do problema resúmense nas ecuacións seguintes: x + y = 10 (preguntas) 2x - 1y = 8 (puntos) Resolvendo o sistema, a solución é: x = 6, y = 4. Fallei catro preguntas.

Actividade 2. Calcule dous números sabendo que se diferencian en 14 unidades e que a súa media aritmética é 25.

Solución	Sexan x e y os números que nos piden. As condicións do problema son: Diferenza en 14 unidades: x - y = 14 Media aritmética: $\frac{x+y}{2} = 25$ A solución do sistema é x = 32, y = 18

Actividade 3. A idade de Antía é o dobre que a de Xiana. Se Antía tivese 12 anos menos e Xiana 8 anos máis, as dúas terían a mesma idade. Cantos anos ten cada unha?

Solución	Idade de Antía = x; idade de Xiana = y Condicións do problema: Idade dobre: x = 2y Outra condición: x - 12 = y + 8 A solución do sistema é x = 40 anos, y = 20 anos

Actividades propostas

S21. Ache dous números que sumen 84 e que o seu cociente sexa 6.

S22. Nun curral hai galiñas e coellos; hai 50 cabezas e 134 patas. Cantos coellos e cantas galiñas hai?

S23. O produto de dous números é 4 e a suma dos seus cadrados é 17. Cales son os números?

S24. Temos dous tipos de pensos, un de 0,50 euros o quilogramo e outro de 0,80 euros o quilogramo. Que cantidade de cada tipo debemos mesturar para termos 100 kg de penso a 0,704 euros cada quilogramo?

S25. Unha persoa percorre 1 000 km, parte en coche e parte en bicicleta. No coche vai a 90 km/h e na bicicleta a 20 km/h. Tardou 15 horas en completar a viaxe. Cantos quilómetros fixo en bicicleta?

S26. Un hotel ten cuartos dobres e individuais; en total son 120 cuartos. O número de camas é 195. Cantos dos cuartos son dobres?

S27. Nunha festa, se cada invitado come cinco pasteis daquela sobran tres, e se come seis falta un. Cantos invitados e cantos pasteis hai na festa?

3. Resumo de contidos

A función cuadrática

- As funcións cuadráticas son as que se poden expresar mediante un polinomio de segundo grao da forma $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$), e a súa gráfica sempre é unha parábola.
- Características das gráficas das funcións cuadráticas:
  - A gráfica alcanza o seu punto máximo ou mínimo no vértice da parábola. A coordenada x_v do vértice obtense mediante a fórmula:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

  - A gráfica é simétrica respecto dun paralelo ao eixe OY, e ten dúas pólas: nunha póla a función é crecente e na outra é decrecente.
  - A gráfica pode ser cóncava (aberta cara abaixo Λ), se $a < 0$, ou convexa (aberta cara arriba V), se $a > 0$.

A ecuación de segundo grao

- Unha ecuación de segundo grao $ax^2 + bx + c = 0$ é *completa* cando os coeficientes a, b e c son todos distintos de cero. Se os coeficientes b ou c, ou os dous, son nulos, a ecuación chámase *incompleta*.
- As solucións da ecuación de segundo grao obtéñense a partir da expresión:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{sempre } a \neq 0)}$$

Número de solucións dunha ecuación de segundo grao

- O número de solucións dunha ecuación de segundo grao depende do valor do seu discriminante. O discriminante é o termo: $b^2 - 4ac$.
- Existen tres posibilidades, segundo o signo do discriminante:
  - Discriminante $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ A ecuación ten dúas solucións distintas.
  - Discriminante $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ A ecuación ten unha solución (solución dobre).
  - Discriminante $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ A ecuación non ten ningunha solución.

Ecuacións de segundo grao incompletas

Pódense resolver aplicando a fórmula xeral, substituíndo por 0 os coeficientes que faltan na ecuación, pero tamén se poden resolver despexando x directamente.

- Ecuacións de tipo $ax^2 + c = 0$

  Despexamos directamente a incógnita x:

$$ax^2 + c = 0 \qquad ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Ecuacións de tipo $ax^2 + bx = 0$

  Sacamos factor común x e igualamos a cero os dous factores:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0$$

$$x(ax+b)=0 \begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \;\Rightarrow\; ax=-b \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

  Este tipo de ecuacións sempre ten dúas solucións, unha delas $x = 0$.

Solucións dunha ecuación e puntos de corte co eixe OX

- Os puntos de corte da gráfica da función cuadrática $y = ax^2 + bc + c$ obtéñense resolvendo a ecuación $ax^2 + bc + c = 0$. Se as solucións da ecuación son x_1 e x_2, os puntos de corte co eixe OX son os puntos de coordenadas $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

Sistemas de ecuacións lineais

- Unha ecuación é *lineal* cando é de primeiro respecto de todas as incógnitas, e non hai produtos nin divisións entre elas; por exemplo, $3x + 2y - 8 = 0$.
- Un sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas ten a forma xeral:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais

- Existen catro métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais:
  - Método de *substitución*: Despexamos unha incógnita, xeralmente a que resulte máis sinxela de despexar, e substituímos o seu valor na outra ecuación.
  - Método de *igualación*: Despexamos a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualamos as expresións obtidas.
  - Método de *redución*: Multiplicamos as ecuacións polos números convenientes de xeito que os valores dos coeficientes dunhas das incógnitas sexan opostos e, seguidamente, sumamos ambas ecuacións.
  - Método *gráfico*: Despexamos a incógnita y en cada ecuación e representamos graficamente as funcións lineais obtidas, que serán dúas rectas. As coordenadas do punto de corte das rectas (x, y) serán as solucións do sistema.

Interpretación gráfica da solución dun sistema de ecuación lineais

- Segundo a posición relativa das rectas correspondentes ás ecuacións lineais que forman o sistema dado, poden existir tres posibilidades:
  - As rectas córtanse nun punto (x, y): O sistema é *compatible* e ten solución e esta vén dada polos valores de x e y.
  - As rectas son coincidentes: teñen infinitos puntos comúns. O sistema é *compatible* e ten infinitas solucións, que son os valores dos puntos (x, y) que pertencen á recta.
  - As rectas son paralelas. O sistema é *incompatible* xa que as rectas non teñen ningún punto común.

4. Actividades complementarias

Función cuadrática

S28. Atope o vértice e os puntos de corte co eixe OX das parábolas seguintes:

$y = 8x^2$	$y = x^2 - 2x$	$y = - x^2 - 2x - 1$

S29. Represente as seguintes funcións cuadráticas: $y = 2x^2$, $y = - x^2 + 3x – 5$, $y= 3x^2+2x$.

S30. Atope as coordenadas do vértice das parábolas:

$y = x^2 + 10x + 25$	$y = 2x^2 - x +1$	$y = - x^2 - 8x + 9$

S31. Sabemos que a función cuadrática $y = ax^2 + bx$ pasa polos puntos (-1, -5) e (1, -3). Determine o valor dos coeficientes a e b.

S32. Atope a función cuadrática que ten o vértice no punto (2,-1) e pasa polo punto (0, 3).

Ecuacións de segundo grao

S33. Resolva as ecuacións:

$x^2 - 6x + 7 = –2$	$21x^2 + 100 = - 5$	$x^2 - 3x + 2 = 0$
$x(2x-1)+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5}$	$2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$	$2x-\frac{6x^2-2x+1}{6}+\frac{2x^2-3x}{2}=-1$

Problemas con ecuacións de segundo grao

S34. Un concesionario de coches crea unha campaña publicitaria. Espera que o número y de coches vendidos (en centos) en cada ano x veña dado pola función $y = 0,5\,x^2 - x + 1$

- Represente graficamente a función, comezando en x = 0.
- Cal será o ano de menos vendas? Cantos coches venderá ese ano?
- A partir de que ano se recuperan as vendas?

S35. Para embaldosar un salón de 8 m de lonxitude por 6 m de largura utilizáronse 300 baldosas cadradas. Canto mide o lado das baldosas?

S36. A diagonal dun rectángulo mide 10 cm. Calcula as súas dimensións se un lado mide 2 cm menos que o outro.

S37. Dentro de 12 anos a idade de Pedro será a metade do cadrado da idade que tiña hai 12 anos. Cal é a idade actual de Pedro?

Sistemas de ecuacións

S38. Resolva os sistemas de ecuacións.

$\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 7x+4y-10=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+11y=12 \\ x-3y=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x-(y+1)=3 \\ y+(x+3)=4 \end{cases}$

S39. Resolva graficamente os sistemas:

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+8=x \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-2 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$

S40. O perímetro dun triángulo rectángulo isóscele mide 16 cm e a altura mide 4 cm. Ache a medida dos lados do triángulo.

S41. A suma de dous números é o dobre que a súa diferenza, e un deles é triplo do outro. Calcule o valor deses números.

S42. Berta paga por dous cafés puros e tres con leite 3,45 euros; Edelmiro paga 0,30 euros menos por catro puros e un con leite. Canto vale cada tipo de café?

S43. Un deportista é dez veces máis rápido correndo que nadando. Nunha proba percorre 4.410 m correndo durante 10 minutos e nadando durante 5 minutos. Con que velocidades corre e nada o deportista?

5. Exercicios de autoavaliación

1. A parábola $y = 3x^2 + 6x$:

- ☐ Non pasa pola orixe de coordenadas.
- ☐ Ten o vértice en $x_v = -1$.
- ☐ É aberta cara a abaixo.

2. A parábola $y = -2x^2 + 3$:

- ☐ Pasa polo punto (0, 3).
- ☐ Ten o vértice no punto (3, 1).
- ☐ Pasa pola orixe de coordenadas.

3. As solucións da ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$ son:

- ☐ 3 e 5
- ☐ -1 e 6
- ☐ 4 e 0

4. As solucións da ecuación $3x^2 + 6x = 0$ son:

- ☐ 0 e 1
- ☐ 3 e 8
- ☐ 0 e -2

5. Das vilas A e B, distantes 132 km, saen ao mesmo tempo dous ciclistas en sentidos contrarios pola mesma estrada. O que sae de A vai a 19 km/h, e o que sae de B vai a 14 km/h. A que distancia de A se atoparán? En canto tempo?

- ☐ 70 km, 4 h
- ☐ 70 km, 5 h
- ☐ 76 km, 4 h
- ☐ 76 km, 5 h

6. A solución do sistema do cadro é:

- ☐ $x = 2, y = 5$
- ☐ $x = 3, y = 5/2$
- ☐ $x = 3/5, y = 2/5$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - 4y = 5 \end{cases}$$

7. Resolva graficamente o sistema de ecuacións do cadro.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 5x - 4y = 5 \end{cases}$$

x	y	x	y

8. O cociente de dous números é 3/4. Se se suma 10 a cada un deles, o seu cociente é 11/14. Eses números son:

☐ 30 e 40.

☐ 45 e 40.

☐ 45 e 60.

9. A suma dun número máis o seu inverso é 37/6. Este número é:

☐ 16

☐ 10

☐ 6

10. A idade de Xosefa era hai seis anos a raíz cadrada da idade que terá dentro de seis anos. Cantos anos ten Xosefa hoxe?

☐ 10

☐ 45

☐ 3

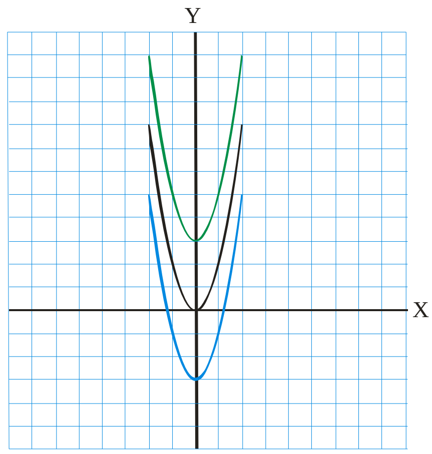
5.1 Solucións das actividades propostas

S1.

▪ $y = -3/2\ x^2$	$a = -3/2 < 0$ Cóncava	▪ $y = 7\ x^2$	$a = 7 > 0$ Convexa
▪ $y = 3/5\ x^2$	$a = 3/5 > 0$ Convexa	▪ $y = -\ 0,32\ x^2$	$a = -\ 0,32 < 0$ Cóncava

S2.

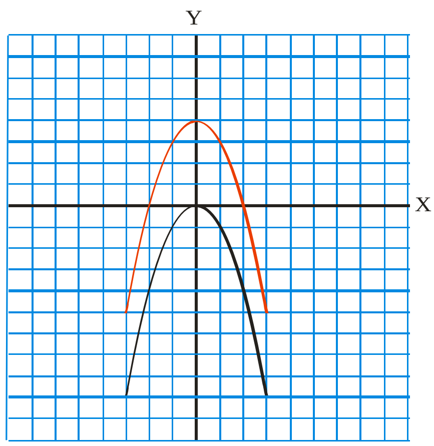
$y = 2x^2 + 3$		$y = 2x^2$		$y = 2x^2 - 3$	
x	y	x	y	x	y
-3	21	-3	18	-3	15
-2	11	-2	8	-2	5
-1	5	-1	2	-1	-1
0	3	0	0	0	-3
1	5	1	2	1	-1
2	11	2	8	2	5
3	21	3	18	3	15



Efectivamente, a gráfica da función $y = 2x^2 + 3$ (verde) está desprazada 3 unidades máis arriba que a gráfica da función $y = 2x^2$ (negra), e a gráfica da función $y = 2x^2 - 3$ (azul) está desprazada 3 unidades máis abaixo.

S3.

$y = -\ x^2$		$y = -\ x^2 + 4$	
x	y	x	y
-3	-0	-3	-5
-2	-4	-2	0
-1	-1	-1	3
0	0	0	4
1	-1	1	3
2	-4	2	0
3	-9	3	-5



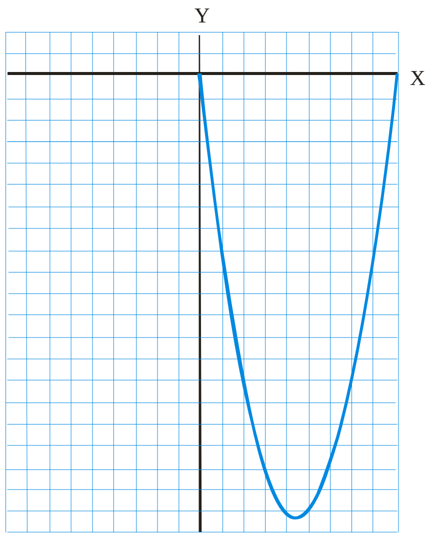
Obsérvase que a gráfica da función $y = -\ x^2 + 4$ está desprazada 4 unidades máis arriba que a gráfica da función $y = -\ x^2$.

S4.

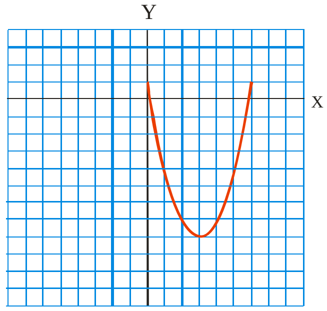
▪ y = x² - 8	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.2} = 0$ $y_v = 0^2 - 8 = -8$ As coordenadas do vértice son $(0, -8)$
▪ y = x²- x + 5	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.1} = \frac{1}{2}$ $y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 5 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{1-2+20}{4} = \frac{19}{4}$ As coordenadas do vértice son $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right)$
▪ y = 1/2 x² - 4x + 1	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.\frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$ $y_v = \frac{1}{2}.4^2 - 4.4 + 1 = 8 - 16 + 1 = -7$ As coordenadas do vértice son $(4, -7)$
▪ y = - x² - 2x + 4	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2.(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ $y_v = -(-1)^2 - 2.(-1) + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$ As coordenadas do vértice son $(-1, 5)$
▪ y = 3x² + 6x - 1	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2.3} = \frac{-6}{6} = -1$ $y_v = 3.(-1)^2 + 6.(-1) - 1 = 3 - 6 - 1 = -4$ As coordenadas do vértice son $(-1, -4)$

S5.

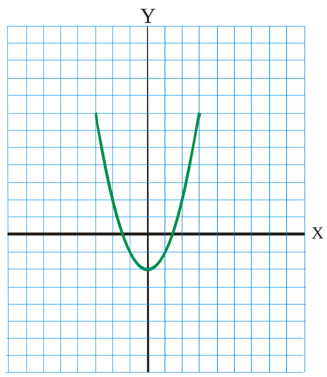
y = x² - 9x	
x	y
x	y
0	0
1	-8
2	-14
3	-18
4	-20
x_v = 9/2	y_v= -81/4
5	-20
6	-18
7	-14
8	-8
9	0



$y = x^2 - 6x + 1$	
x	y
0	1
1	-4
2	-7
$x_v = 3$	$y_v = -8$
4	-7
5	-4
6	1



$y = x^2 - 2$	
x	y
-3	7
-2	2
-1	-1
$x_v = 0$	$y_v = -2$
1	-1
2	2
3	7



S6.

▪ **$y = x^2 - 3x + 5$**	$a > 0$, $b < 0$ a, b teñen distinto signo. O vértice está situado á dereita.
▪ **$y = x^2 - 4x$**	$a > 0$, $b < 0$ a, b teñen distinto signo. O vértice está situado á dereita.

S7.

▪ $x^2 - 5x + 6 = 0$	$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{5+1}{2}=3\\ x_2=\frac{5-1}{2}=2\end{cases}$
▪ $2x^2 - 12x + 10 = 0$	$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4.2.10}}{2.2}=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{4}=\frac{12\pm\sqrt{64}}{4}=\begin{cases}x_1=\frac{12+8}{4}=5\\ x_2=\frac{12-8}{4}=1\end{cases}$

▪ $4x^2 + 4x - 3 = 0$	$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.4.(-3)}}{2.4}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{8}=\begin{cases}x_1=\frac{-4+8}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\\ x_2=\frac{-4-8}{8}=\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}\end{cases}$
▪ $x^2 + 9x - 10 = 0$	$x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4.1.(-10)}}{2.1}=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{-9+11}{2}=1\\ x_2=\frac{-9-11}{2}=-10\end{cases}$

S8.

▪ $3x^2 - 6x + 3 = 0$	$b^2 - 4ac = (-6)^2 – 4.3.3 = 36 – 36 = 0 \rightarrow$ A ecuación ten unha solución
▪ $x^2 + x - 3 = 0$	$b^2 - 4ac = 1^2 – 4.1.(-3) = 1 + 12 = 13 > 0 \rightarrow$ A ecuación ten dúas solucións
▪ $x^2 + x + 3 = 0$	$b^2 - 4ac = 1^2 – 4.1.3 = 1 - 12 = -11 < 0 \rightarrow$ A ecuación non ten solución
▪ $-x^2 - 2x - 3 = 0$	$b^2 - 4ac = (-2)^2 – 4.(-1).(-3) = 4 - 12 = -8 < 0 \rightarrow$ A ecuación non ten solución
▪ $2x^2 + 5x + 1 = 0$	$b^2 - 4ac = 5^2 – 4.2.1 = 25 - 8 = 17 > 0 \rightarrow$ A ecuación ten dúas solucións

S9.

▪ $3x^2 - 27 = 0$	$3x^2=27 \Rightarrow x^2=\frac{27}{3}=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-3\end{cases}$
▪ $3/2\ x^2 + 15 = 0$	$\frac{3}{2}x^2=-15 \Rightarrow x^2=\frac{-15.2}{3}=\frac{-30}{3}=-10 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-10}$ A ecuación non ten solución
▪ $1/3\ x^2 - 25/3 = 0$	$\frac{1}{3}x^2=\frac{25}{3} \Rightarrow 3x^2=3.25 \rightarrow x^2=\frac{75}{3}=25 \Rightarrow x=\pm\sqrt{25}=\begin{cases}x_1=5\\ x_2=-5\end{cases}$
▪ $x^2 - 9/4 = 0$	$x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{3}{2}\end{cases}$
▪ $-2x^2 + 50x = 0$	$x(-2x+50)=0 \begin{cases}x=0\\ -2x+50=0 \rightarrow -2x=-50 \rightarrow x=\frac{-50}{-2}=25\end{cases}$
▪ $13x^2 + 52x = 0$	$x(13x+52)=0 \begin{cases}x=0\\ 13x+52=0 \rightarrow 13x=-52 \rightarrow x=\frac{-52}{13}=-4\end{cases}$
▪ $x^2 + x = 0$	$x(x+1)=0 \begin{cases}x=0\\ x+1=0 \rightarrow x=-1\end{cases}$

S10.

Se denominamos x a unha parte do número, a outra parte será (10 – x). Podemos expresar así a condición do problema:

$x^2 + (10 - x)^2 = 50$. Desenvolvendo o cadrado e agrupando termos obtemos:

$x^2 + (10 - x)^2 = 50 \quad \Rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 50 \quad \Rightarrow 2x^2 - 20x + 100 - 20x - 50 = 0 \quad \Rightarrow 2x^2 - 20x + 50 = 0$

Como todos os coeficientes son múltiplos de 2, dividimos a ecuación entre 2 e resolvemos: $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

A solución é única. Unha parte do número será x = 5, e a outra parte 10 – 5 = 5.

Evidentemente cúmprense as condicións do problema, xa que: $5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$

S11.

Sexa x o número a determinar. O seu tripo será 3x e o seu cadrado x^2. Polo tanto podemos escribir así as condicións do problema: $3x + x^2 = 88$

Agrupamos os termos no primeiro membro e aplicamos a fórmula: $x^2 + 3x – 88 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-88)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 352}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 19}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \frac{-3 - 19}{2} = \frac{-22}{2} = -11 \end{cases}$$

Existen dúas solucións: $x_1 = 8$ e $x_2 = -11$

Comprobación:

$x_1 = 8 \longrightarrow 3 \cdot 8 + 8^2 = 24 + 64 = 88$

$x_2 = -11 \longrightarrow 3 \cdot (-11) + (-11)^2 = -33 + 121 = 88$

S12.

Sexa x a idade da persoa. O seu cadrado será x^2, o triplo será 3x e nove veces esta, 9x.

Segundo as condicións do problema escribimos a ecuación: $x^2 – 3x = 9x$

Agrupamos no primeiro membro e reducimos: $x^2 – 3x – 9x = 0 \longrightarrow x^2 - 12x = 0$

Ao tratarse dunha ecuación de segundo grao sen termo independente, podemos descompoñer en factores extraendo x factor común: $x(x - 12) = 0$

As solucións son:

$x_1 = 0$

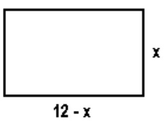
$x – 12 = 0 \longrightarrow x_2 = 12$

Comprobación:

$x_1 = 0 \longrightarrow 0^2 – 3 \cdot 0 = 9 \cdot 0 \longrightarrow 0 – 0 = 0$ (solución trivial)

$x_2 = 12 \longrightarrow 12^2 – 3 \cdot 12 = 9 \cdot 12 \longrightarrow 144 – 36 = 108 \longrightarrow 108 = 108$

S13.



Se o perímetro do rectángulo é 24, a suma do longo e a largura será a metade, é dicir, 12.

Sexa x a largura do rectángulo, daquela o longo será (12 – x).

Lembrando que: Área do rectángulo = Longo x Largura , podemos escribir:

$(12 - x)\cdot x = 35 \rightarrow 12x - x^2 = 35 \rightarrow -x^2 + 12x - 35 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-35)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{-2} = \frac{-12 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-12 \pm 2}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-12+2}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5 \\ x_2 = \frac{-12-2}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7 \end{cases}$$

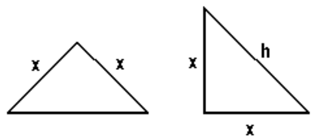
Existen dúas solucións:

$x_1 = 5$ (longo). A largura será: $12 - x = 12 - 5 = 7$

$x_2 = 7$ (longo). A largura será: $12 - x = 12 - 7 = 5$

As dúas solucións representan o mesmo rectángulo de dimensións 7 m e 5 m e de área 7 m x 5 m = 35 m^2

S14.



Sexa x a medida dos lados iguais e b a medida da base. Cambiando a posición do triángulo, como se observa na segunda figura, e aplicando a fórmula da área obtemos:

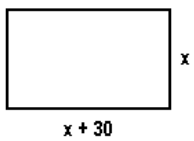
$$\frac{x\cdot x}{2} = 12 \quad \Rightarrow x^2 = 24 \quad \Rightarrow x = \sqrt{24} = 4{,}9$$

A medida da base obtense aplicando o teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2$

$h^2 = x^2 + x^2 = 4{,}92 + 4{,}92 = 24 + 24 = 48 \rightarrow h = \sqrt{48} = 6{,}9$

Polo tanto, o perímetro do triángulo será: 4,9 m + 4,9 m + 6,9 m = 16,7 m

S15.



Sexa x o ancho do campo. Se mide 30 m máis de longo, este será (x + 30). Aplicando a fórmula da área do rectángulo temos: $x\cdot(x + 30) = 7000 \rightarrow x^2 + 30x = 7000 \rightarrow x^2 + 30x - 7000 = 0$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4\cdot 1\cdot(-7000)}}{2\cdot 1} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 28000}}{2} = \frac{-30 \pm \sqrt{28900}}{2} = \frac{-30 \pm 170}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-30+170}{2} = \frac{140}{2} = 70 \\ x_2 = \frac{-30-170}{2} = \frac{-200}{2} = -100 \end{cases}$$

A segunda solución non é válida xa que a medida dunha lonxitude nunca pode ser negativa, polo que a única solución é x = 70 → largura = 70 m, longo = 70 m + 30 m = 100 m

S16.

Sexa x o primeiro número e (x + 7) o segundo. O seu produto é 60, polo que podemos escribir a ecuación:

$x \cdot (x + 7) = 60 \longrightarrow x^2 + 7x = 60 \longrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+17}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-7-17}{2} = \dfrac{-24}{2} = -12 \end{cases}$$

Existen dúas solucións, é dicir, dúas parellas de números que cumpren as condicións do problema.

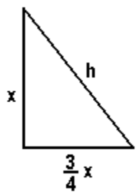
Primeira solución:

Primeiro número: x = 5. Segundo número: x + 7 = 5 + 7 = 12

Segunda solución:

Primeiro número: x = -12. Segundo número: x + 7 = -12 + 7 = -5

S17.



Sexa x a medida dun cateto. A medida do outro cateto será $\frac{3}{4}x$. A medida da hipotenusa obtémola aplicando o teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{x^2 + \left(\tfrac{3}{4}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + 9x^2/16} = \sqrt{\left(16x^2 + 9x^2\right)/16} = \sqrt{\frac{25x^2}{16}} = \frac{5x}{4}$$

Sabemos que o perímetro do triángulo é 24 m, polo que podemos escribir a ecuación:

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 24 \quad \Rightarrow \frac{4x + 3x + 5x}{4} = \frac{96}{4} \quad \Rightarrow 12x = 96 \quad \Rightarrow x = \frac{96}{12} = 8$$

Polo tanto, as medidas dos lados do triángulo son:

x = 8 m

$$\frac{3}{4}x = \frac{3 \cdot 8}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ m}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{5 \cdot 8}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ m}$$

Comprobación: 8 m + 6 m + 10 m = 24 m

S18.

Sexa x o número total de alumnos de ESA. Se asistiran todos a clase cada un recibiría $\frac{525}{x}$ euros.

Ao non asistir 25, o número de alumnos será (x – 25) e a cada un tócalle percibir $\frac{525}{x-25}$ euros, pero esta cantidade é 0,5 euros maior que a anterior. Polo tanto podemos escribir a ecuación:

$$\frac{525}{x} = \frac{525}{x-25} - 0{,}5 \quad \Rightarrow \frac{525}{x} = \frac{525 - 0{,}5(x-25)}{x-25} \quad \Rightarrow \frac{525}{x} = \frac{525 - 0{,}5x + 12{,}5}{x-25} \quad \Rightarrow \frac{525}{x} = \frac{537{,}5 - 0{,}5x}{x-25} \quad \Rightarrow$$

$$525(x-25) = x(537{,}5 - 0{,}5x) \quad \Rightarrow 525x - 13125 = 537{,}5x - 0{,}5x^2 \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 + 525x - 537{,}5x - 13125 = 0 \quad =$$

$$0{,}5x^2 - 12{,}5x - 13125 = 0$$

Multiplicamos e ecuación por 2 para obter coeficientes enteiros e despexamos: $x^2 - 25x + 26\,250 = 0$

$$x = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-26250)}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 105000}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{105625}}{2} = \frac{25 \pm 325}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{25+325}{2} = \dfrac{350}{2} = 175 \\ x_2 = \dfrac{25-325}{2} = \dfrac{-300}{2} = -150 \end{cases}$$

Como o número de alumnos non pode ser negativo, polo que a única solución válida é x = 175 alumnos.

Comprobación:

Se asisten os 175 alumnos, a cada un tócalle percibir 525 : 175 = 3 €

Se faltan 25 alumnos, asisten 150, polo que a cada un lle toca percibir 525 : 150 = 3,50 €, é dicir, 0,50 € máis.

S19.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

- *Método de substitución*: despexamos x na primeira ecuación e substituímos na segunda:

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 5 - y - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow -y - 2y = -1 - 5 \Rightarrow$$

$$-3y = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2 \Rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

- *Método de igualación*: despexamos a mesma incógnita en ambas as ecuacións procurando que sexa a máis sinxela de despexar, neste caso x, e igualamos as expresións obtidas:

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ x = 2y - 1 \end{cases} \quad \textit{Igualando} \quad 5 - y = 2y - 1$$

$$-y - 2y = -1 - 5 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2 \Rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

- *Método de redución*: cambiamos de signo a segunda ecuación para conseguir os mesmos coeficientes de x, mais de signo contrario:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \quad \textit{Sumando} \quad \begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \\ \hline 3y = 6 \end{array} \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

Substituímos o valor y = 2 na primeira ecuación para calcular o valor de x:

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

- *Método de substitución*: despexamos a incógnita máis doada de despexar, neste caso x na segunda ecuación, e substituímola na primeira:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Rightarrow 2(7 - 2y) - 3y = -7 \Rightarrow 14 - 4y - 3y = -7 \Rightarrow -4y - 3y = -7 - 14$$

$$7y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow x = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$$

- *Método de igualación*: Despexamos a incógnita x en ámbalas dúas ecuacións e igualamos as expresións obtidas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3y - 7}{2} \\ x = 7 - 2y \end{cases} \Rightarrow \frac{3y - 7}{2} = 7 - 2y \Rightarrow 3y - 7 = 14 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 14 + 7$$

$$7y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow x = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$$

- *Método de redución*: Multiplicamos a segunda ecuación por (-2) para obter o mesmos coeficientes de x na primeira ecuación, cambiados de signo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ -2x - 4y = -14 \end{cases} \Rightarrow \textit{Sumando} \quad \begin{array}{r} 2x - 3y = -7 \\ -2x - 4y = -14 \\ \hline -7y = -21 \end{array} \Rightarrow -7y = -21 \Rightarrow y = \frac{-21}{-7} = 3$$

Substituímos o valor y = 3 na segunda ecuación para despexar x:

$$x + 2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow x + 6 = 7 \Rightarrow x = 7 - 6 \Rightarrow x = 1$$

$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=6 \\ x-2y=-4 \end{cases}$	▪ *Método de substitución*: Despexamos x na segunda ecuación e substituímolo na primeira: $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=6 \\ x=2y-4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}(2y-4)+\frac{1}{3}y=6 \Rightarrow 3(2y-4)+2y=36 \Rightarrow 6y-12+2y=36$ $6y+2y=36+12 \Rightarrow 8y=48 \Rightarrow y=\frac{48}{8}=6 \Rightarrow x=2\cdot 6-4=12-4=8$ ▪ *Método de igualación*: Eliminamos denominadores na primeira ecuación e despexamos a mesma incógnita x en ámbalas dúas ecuacións, igualando as expresións obtidas: $\begin{cases} 3x+2y=36 \\ x=2y-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{36-2y}{3} \\ x=2y-4 \end{cases}$ *Igualando* $\frac{36-2y}{3}=2y-4$ $36-2y=6y-12 \Rightarrow -2y-6y=-12-36 \Rightarrow -8y=-48 \Rightarrow y=\frac{-48}{-8}=6$ $x=2\cdot 6-4=12-4=8$ ▪ *Método de redución*: eliminamos os denominadores na primeira ecuación e sumamos as ecuacións, xa que temos os mesmos coeficientes en y, mais con signo contrario: $\begin{cases} 3x+2y=36 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=36 \\ \underline{x-2y=-4} \\ 4x=32 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{32}{4}=8$ Substituíndo este valor de x na segunda ecuación e despexando y obtemos: $8-2y=-4 \Rightarrow -2y=-4-8 \Rightarrow -2y=-12 \Rightarrow y=\frac{-12}{-2}=6$
$\begin{cases} 2x-y=10 \\ 4x+7y=20 \end{cases}$	▪ *Método de substitución*: Despexamos a incógnita y na primeira ecuación e substituímola na segunda: $\begin{cases} y=2x-10 \\ 4x+7y=20 \end{cases} \Rightarrow 4x+7(2x-10)=20 \Rightarrow 4x+14x-70=20 \Rightarrow$ $14x+4x=20+70 \Rightarrow 18x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{18}=5 \Rightarrow y=2\cdot 5-10=10-10=0$ ▪ *Método de igualación*: Despexamos a incógnita y en ámbalas dúas ecuacións e igualamos: $\begin{cases} y=2x-10 \\ y=\frac{20-4x}{7} \end{cases}$ *Igualando* $: 2x-10=\frac{20-4x}{7} \Rightarrow 14x-70=20-4x \Rightarrow$ $14x+4x=20+70 \Rightarrow 18x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{18}=5 \Rightarrow y=2\cdot 5-10=10-10=0$ ▪ *Método de redución*: multiplicamos a primeira ecuación por 7 para conseguir os mesmos coeficientes de y con signo contrario en ambas ecuacións: $\begin{cases} 7(2x-y)=7\cdot 10 \\ 4x+7y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x-7y=70 \\ 4x+7y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x-7y=70 \\ \underline{4x+7y=20} \\ 18x=90 \end{cases} \Rightarrow$ $18x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{18}=5$ Substituíndo este valor de x na primeira ecuación e despexando y obtemos: $2\cdot 5-y=10 \Rightarrow 10-y=10 \Rightarrow -y=10-10=0 \Rightarrow y=0$

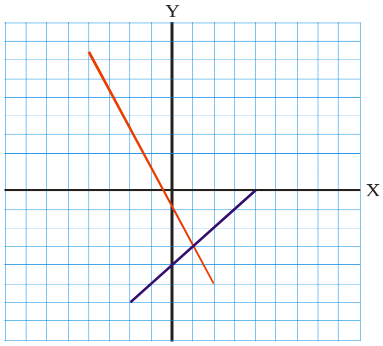
S20.

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Despexamos a incógnita *y* en ámbalas dúas ecuacións e representamos graficamente as funcións lineais obtidas elaborando as táboas de valores x, y:

$$\begin{matrix} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = -2x - 1 \\ y = x - 4 \end{matrix}$$

y= -2x - 1		y = x - 4	
x	y	x	y
-2	3	-2	-6
-1	1	-1	-5
0	-1	0	-4
1	-3	1	-3
2	-5	2	-2



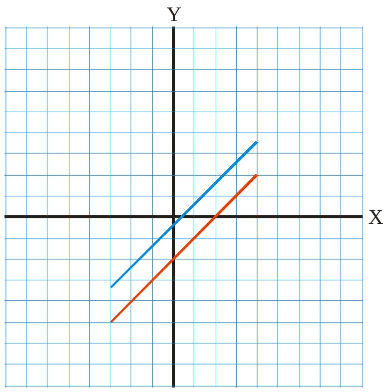
As gráficas das dúas funcións lineais córtanse no punto (1, -3). Polo tanto, a solución do sistema é x = 1 , y = -3.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$$

Despexando a incógnita *y* en ámbalas dúas ecuacións obtemos:

$$\begin{cases} -y = 2 - x \\ -3y = -3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = \dfrac{3x - 1}{3} \end{cases}$$

y = x - 2		$y = \frac{3x - 1}{3}$	
x	y	x	y
-3	-5	-3	-10/3
-2	-4	-2	-7/3
-1	-3	-1	-4/3
0	-2	0	-1/3
1	-1	1	2/3
2	0	2	5/3
3	1	3	8/3
4	2	4	11/3



As gráficas das dúas funcións son paralelas, polo que non se cortan en ningún punto, o que significa que o sistema é incompatible e non ten solución.

S21.

Sexan x e y os números a determinar. Se a súa suma é 84 podemos escribir: $x + y = 84$.

Que o seu cociente sexa 6 significa que $\frac{x}{y} = 6$

Resolvemos o sistema formado por ámbalas dúas ecuacións:

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ \frac{x}{y} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 84 \\ x = 6y \end{cases} \Rightarrow 6y + y = 84 \Rightarrow 7y = 84 \Rightarrow y = \frac{84}{7} = 12 \Rightarrow x = 6y = 6 \cdot 12 = 72$$

Polo tanto, os números pedidos son $x = 72$ e $y = 12$.

Comprobación:

$x + y = 72 + 12 = 84$

$\frac{x}{y} = \frac{72}{12} = 6$

S22.

Sexa x o número de galiñas e y o número de coellos.

O número de cabezas é igual ao número de animais, polo que: $x + y = 50$

O número de patas de x galiñas é 2x e o número de patas de y coellos é 4y. Polo tanto, $2x + 4y = 134$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 134 \end{cases} \quad \text{Sumando} \quad \begin{array}{r} \begin{cases} -2x - 2y = -100 \\ 2x + 4y = 134 \end{cases} \\ \hline 2y = 34 \end{array} \Rightarrow y = \frac{34}{2} = 17 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow x = 50 - 17 \Rightarrow x = 33$$

Polo tanto, o número de galiñas é $x = 33$, e o número de coellos $y = 17$.

Comprobación: Galiñas: $2 \cdot 33 = 66$ patas ; Coellos: $4 \cdot 17 = 68$ patas

Número total de patas = 66 + 68 = 134 patas

S23.

Sexan x e y os números a determinar. Se o seu produto é 34, podemos escribir: $x \cdot y = 4$

A suma dos seus cadrados é 34, polo que $x^2 + y^2 = 34$.

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} = 17 \Rightarrow x^4 + 16 = 17x^2 \Rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Esta ecuación resólvese efectuando unha substitución: $x^2 = z$, $x^4 = (x^2)^2 = z^2$:

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{-(-17) = \pm\sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} z_1 = \frac{17 + 15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \\ z_2 = \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Na expresión seguinte podemos obter o valor de x: $x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$

Polo tanto, se $z_1 = 16$, temos que $x = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ .Para cada valor de x temos un valor de y:

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1$ $\qquad$ $x = -4 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-4} = -1$

De igual modo, se $z_2 = 1$, temos que $x = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Para cada valor de x temos un valor de y:

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{1} = 4$ $\qquad$ $x = -1 \Rightarrow y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4$

Polo tanto no segundo obtemos as mesmas solucións: 1, 4 e -1, -4.

S24.

Sexa x a cantidade de penso de 0,50 €/kg que debemos mesturar e y a cantidade de penso de 0,80 €/kg. Segundo as condicións do problema, temos a ecuación: x + y = 100

Doutra parte, o valor de x kg de penso de 0,50 €/kg será 0,50x, o valor de y kg de penso de 0,80 €/kg será 0,80y, e o valor de 100 kg de penso a 0,704 €/kg será 100·0,704 = 70,4 €. Polo tanto, como o valor total da mestura é o mesmo que o valor dos pensos antes de mesturalos, obtemos a ecuación: 0,50 x + 0,80 y = 70,4.

Resolvendo o sistema por substitución, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}50\,x + 0{,}80\,y = 70{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ 0{,}50x + 0{,}80(100 - x) = 70{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 0{,}50\,x + 80 - 0{,}80x = 70{,}4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$0{,}50x - 0{,}80x = 70{,}4 - 80 \Rightarrow -0{,}30\,x = -9{,}60 \Rightarrow x = \frac{-9{,}60}{-0{,}30} = 32 \Rightarrow y = 100 - 32 = 68$$

Polo tanto, deberemos mesturar 32 kg de penso de 0,50 €/kg e 68 kg de penso de 0,80 €/kg.

S25.

Sexa x a parte do traxecto que percorreu en bicicleta e y a parte que percorreu en coche. Das condicións do problema deducimos a ecuación: x + y = 1000

Doutra parte, lembrando que no movemento uniforme t = e/v, o tempo empregado en percorrer en bicicleta x km a unha velocidade de 20 km/h é $\frac{x}{20}$, e o tempo empregado en percorrer y km a 90 km/h de velocidade é $\frac{y}{90}$. Segundo as condicións do problema, a suma de ambos tempos foi de 15 h, polo que podemos escribir a ecuación: $\frac{x}{20} + \frac{y}{90} = 15$

Eliminando denominadores e resolvendo o sistema por substitución, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{90} = 15 \end{cases} \begin{cases} x = 1000 - y \\ \frac{1000 - y}{20} + \frac{y}{90} = 15 \end{cases} \Rightarrow 9000 - 9y + 2y = 2700 \Rightarrow$$

$$-9y + 2y = 2700 - 9000 \Rightarrow -7y = -6300 \Rightarrow y = \frac{-6300}{-7} = 900 \Rightarrow$$

$$x = 1000 - y = 1000 - 900 = 100$$

$$x = 2 \cdot 6 - 4 = 12 - 4 = 8$$

Polo tanto, percorreu 100 km en bicicleta e 900 en coche.

S26.

Sexa x o número de cuartos dobres e y o número de cuartos individuais, en total 120 cuartos. Polo tanto, podemos escribir a ecuación: x + y = 120

Doutra parte, en x dormitorios dobres o número de camas será 2x, e en y dormitorios individuais o número de camas será tamén y. Segundo as condicións do problema, a suma de ambos é 195, polo que obtemos a ecuación: 2x + y = 195

Resolvendo o sistema por redución, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + y = 195 \end{cases} \quad \textit{Sumando} \quad \begin{array}{l} \begin{cases} -x - y = -120 \\ 2x + y = 195 \end{cases} \\ \hline \quad x = 75 \end{array} \Rightarrow y = 120 - x = 120 - 75 = 45$$

Polo tanto, o número de cuartos dobres é x = 75 e o de cuartos individuais y = 45.

S27.

Sexa x o número de invitados e y o número de pasteis. Se cada invitado come 5 pasteis, o número total de pasteis que comen será 5x, e se cada un come 6 pasteis, o total será 6x.

Das condicións do problema obtemos as ecuacións:

$5x = y - 3$

$6x = y + 1$

Despexando y na primeira ecuación obtemos: $y = 5x + 3$. Substituíndo esta expresión na segunda ecuación:

$6x = 5x + 3 + 1 \longrightarrow 6x - 5x = 3 + 1 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow y = 5x + 3 = 5 \cdot 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

Polo tanto, o número de invitados será $x = 4$ e o número de pasteis $y = 23$.

5.2 Solucións das actividades complementarias

Función cuadrática

S28.

<table>
<tr><td>

- $y = 8x^2$

</td><td>

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 8} = 0$
$y_v = 8 \cdot 0^2 = 0$
Polo tanto, o vértice está situado no punto (0, 0), punto no que a gráfica corta os eixes de coordenadas OX e OY.

</td></tr>
<tr><td>

- $y = x^2 - 2x$

</td><td>

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$
$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
Polo tanto, o vértice está situado no punto (1, -1).
O punto de corte da gráfica con eixe OY obtense na ecuación para o valor x = 0:
$y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$. Polo tanto o punto de corte co eixe OY será (0, 0).
Os puntos de corte da gráfica co eixe OX obtéñense na ecuación para y = 0:
$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0$ e $x = 2$
Nos puntos de corte co eixe OX o valor da ordenada é 0. Polo tanto, os puntos de corte co eixe OX serán os puntos de coordenadas (0, 0) e (2, 0).

</td></tr>
<tr><td>

- $y = -x^2 - 2x - 1$

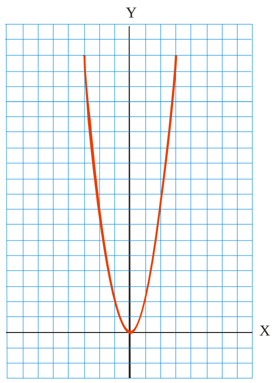
</td><td>

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$
$y_v = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$
Polo tanto, o vértice está situado no punto (-1, 0).
O punto de corte da gráfica con eixe OY obtense na ecuación para o valor x = 0:
$y = -0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$. Polo tanto o punto de corte co eixe OY será (0, -1).
Os puntos de corte da gráfica co eixe OX obtéñense na ecuación para y = 0:
$-x^2 - 2x - 1 = 0$
Resolvendo a ecuación obtemos:
$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$
Como a solución é única existe un só punto de corte co eixe OX, o punto de abscisa x = -1 e ordenada y = 0, é dicir (-1, 0), que é o vértice.

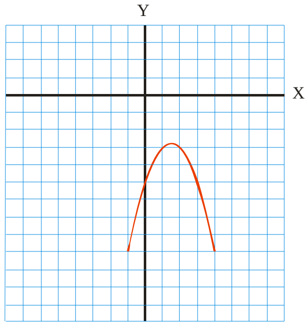
</td></tr>
</table>

S29.

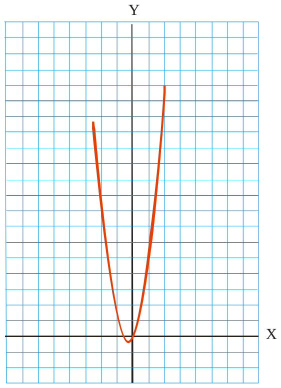
$y = 2x^2$	
x	y
-3	18
-2	8
-1	2
$x_v = 0$	$y_v = 0$
1	2
2	8
3	18



$y = -x^2 + 3x - 5$	
x	y
-1	-9
0	-5
1	-3
$x_v=3/2$	$y_v=-11/4$
2	-3
3	-5
4	-9



$y = 3x^2 + 2x$	
x	y
-5/2	55/4
-2	8
-1	1
$x_v = -1/3$	$y_v = -1/3$
0	0
1	5
2	16



S30.

▪ $y = x^2 + 10x + 25$	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2\cdot 1} = -5$ $y_v = (-5)^2 + 10(-5) + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$ Polo tanto as coordenadas do vértice son (-5, 0).
▪ $y = 2x^2 - x + 1$	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$ $y_v = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$ Polo tanto as coordenadas do vértice son (1/4, 7/8).
▪ $y = -x^2 - 8x + 9$	$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2\cdot(-1)} = \frac{8}{-2} = -4$ $y_v = -(-4)^2 - 8\cdot(-4) + 9 = -16 + 32 + 9 = 25$ Polo tanto as coordenadas do vértice son (-4, 25).

S31.

Substituíndo as coordenadas dos puntos polos que pasa a gráfica na súa ecuación obtemos dúas ecuacións con incógnitas a e b.

Se pasa polo punto de coordenadas (-1, -5), estas cumpren a ecuación da función. Polo tanto, substituíndo x=-1, y=-5 na ecuación da función, obtemos:

$-5 = a(-1)^2 + b(-1) \longrightarrow -5 = a - b$

Procedendo do mesmo xeito co segundo punto (1, -3), obtemos:

$-3 = a\cdot 1 + b\cdot 1 \longrightarrow -3 = a + b$

Resolvendo o sistema formado polas dúas ecuacións obtemos os valores dos coeficientes a e b.

$$\begin{cases} a - b = -5 \\ a + b = -3 \end{cases} \quad Sumando \quad \frac{\begin{cases} a - b = -5 \\ a + b = -3 \end{cases}}{2a = -8} \Rightarrow a = \frac{-8}{2} = -4 \Rightarrow -4 + b = -3 \Rightarrow b = -3 + 4 \Rightarrow b = 1$$

Polo tanto os coeficientes son a = -4, b=1, e a función cuadrática será $y = -4x^2 + x$

S32.

A ecuación da función será da forma $y = ax^2 + bx + c$, na que hai determinar os coeficientes a, b, c.

Que a gráfica pasa polo punto (0, 3) significa que na ecuación da función para x = 0 debe ser y = 3. Substituíndo obtemos:

$3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \rightarrow 3 = c \rightarrow c = 3$

Polo tanto a ecuación da función será: $y = ax^2 + bx + 3$.

A coordenada x_v do vértice obtense a partir da fórmula: $x_v = \frac{-b}{2a}$

Neste caso o vértice está no punto (2, -1) polo que $x_v = 2$.

Substituíndo na expresión anterior obtemos b: $2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b = -4a$

Doutra parte as coordenadas do vértice tamén teñen que cumprir a ecuación da función, é dicir, que para x=2 debe ser y=-1. Substituíndo na ecuación da función obtemos outra ecuación:

$y = ax^2 + bx + 3 \rightarrow -1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 3 \rightarrow -1 = 4a + 2b + 3$

Para resolver o sistema formado polas dúas ecuacións:

$b = -4a$

$-1 = 4a + 2b + 3$

Substituímos o valor b = -4a na segunda ecuación e despexamos a:

$-1 = 4a + 2(-4a) + 3 \rightarrow -1 = 4a - 8a + 3 \rightarrow -1 = -4a + 3 \rightarrow 4a = 3 + 1 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 4/4 = 1$

Substituíndo o valor de a = 1 na primeira ecuación: $b = -4a = -4\cdot 1 = -4$

Polo tanto, a ecuación da función para a = 1, b = -4, c = 3, será: $y = x^2 - 4x + 3$

Ecuacións de segundo grao

S33. Resolva as ecuacións:

$x^2 - 6x + 7 = -2$	Agrupamos todos os termos no primeiro membro e reducimos antes de aplicar a fórmula: $x^2 - 6x + 7 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ A solución é única: x = 3
$x(2x-1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5}$	Eliminamos denominadores reducindo a común denominador: $\frac{5x(2x-1)}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow 5x(2x-1) + 3 = 3x^2 - x + 1$ $10x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - x + 1$ Agrupamos todos os termos no primeiro membro e reducimos antes de aplicar a fórmula: $10x^2 - 3x^2 - 5x + x + 3 - 1 = 0 \rightarrow 7x^2 - 4x + 2 = 0$ $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 7\cdot 2}}{2\cdot 7} = \frac{5 \pm \sqrt{16 - 56}}{14} = \frac{5 \pm \sqrt{-40}}{14}$ A ecuación non ten solución xa que $\sqrt{-40}$ non é un número real.

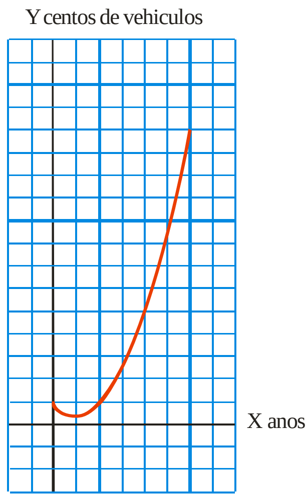
$21x^2 + 100 = -5$	Agrupamos todos os termos no primeiro membro e reducimos: $21x^2 + 100 + 5 = 0 \rightarrow 21x^2 + 105 = 0$ Trátase dunha ecuación de segundo grao incompleta, polo que podemos despexar x directamente sen aplicar a fórmula: $21x^2 + 105 = 0 \rightarrow 21x^2 = -105$ $x^2 = \frac{-105}{21} = -5 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5}$ A ecuación neste caso tampouco ten solución xa que non é posible calcular $\sqrt{-5}$.
$2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$	Agrupamos todos os termos no primeiro membro e reducimos antes de aplicar a fórmula: $2x^2 - 6x - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow -4x^2 + 2x = 0$ Trátase dunha ecuación incompleta sen termo independente, polo que podemos despexar x directamente descompoñendo en factores extraendo x factor común: $-4x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(-4x + 2) = 0$ As solucións son x = 0 e: $-4x + 2 = 0 \rightarrow -4x = -2 \rightarrow x = -2/-4 = 1/2$ Solucións: x = 0, x = 1/2
$x^2 - 3x + 2 = 0$	Podemos aplicar a fórmula directamente: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ Solucións: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
$2x - \frac{6x^2 - 2x + 1}{6} + \frac{2x^2 - 3x}{2} = -1$	Antes de aplicar a fórmula eliminamos denominadores reducindo a común denominador: $\frac{12x}{6} - \frac{6x^2 - 2x + 1}{6} + \frac{3(2x^2 - 3x)}{6} = -\frac{6}{6} \quad \Rightarrow \quad 12x - (6x^2 - 2x + 1) + 3(2x^2 - 3x) = -6$ $12x - 6x^2 + 2x - 1 + 6x^2 - 9x + 6 = 0$ Agrupando termos e reducindo temos: $-6x^2 + 6x^2 + 12x + 2x - 9x - 1 + 6 = 0 \rightarrow 5x + 5 = 0 \rightarrow x = -5/5 = -1$ Solución: x = –1

Problemas con ecuacións de segundo grao

S34.

$y = 0{,}5x^2 - x + 1$

x	y (centos)
0	1
1	0,5
2	1
3	2,5
4	5
5	8,5
6	13



- Cal será o ano de menos vendas? Cantos coches venderá ese ano?

O ano de menos vendas é o 1º xa que para x = 1 obtense o valor máis baixo de y: y = 0,5. O número de vehículos vendidos ese ano é y = 0,5·100 = 50 vehículos.

- A partir de que ano se recuperan as vendas?

A partir do primeiro ano o número de vendas increméntase cada ano.

S35.

Sexa x o lado das baldosas cadradas. A superficie de cada baldosa será x^2.

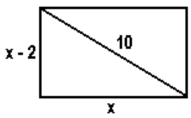
A área do salón a embaldosar é: 8 m x 6 m = 48 m^2

Se se necesitan 300 baldosas para cubrir unha superficie de 48 m^2, podemos escribir: $300 \cdot x^2 = 48$

Despexando obtemos: $x^2 = \frac{48}{300} = 0{,}16 \quad \Rightarrow x = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$ m

Polo tanto precísanse 300 baldosas cadradas de 0,4 m de lado.

S36.



Sexa x o longo do rectángulo. Se a largura mide 2 cm menos a súa medida será (x – 2).

Ollando a figura vemos que os lados e a diagonal forman un triángulo rectángulo no que a diagonal é a hipotenusa e os lados os catetos. Polo tanto, podemos aplicar neste triángulo o teorema de Pitágoras escribindo:

$x^2 + (x-2)^2 = 10^2 \longrightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100 \longrightarrow 2x^2 - 4x + 4 - 100 = 0 \longrightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0$

$$x = \frac{-(-4) = \pm\sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-96)}}{2\cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+768}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{784}}{4} = \frac{4 \pm 28}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+28}{4} = \frac{32}{4} = 8 \\ x_2 = \frac{4-28}{4} = \frac{-24}{4} = -6 \end{cases}$$

A segunda solución non é válida xa que a medida dos lados non pode ser negativa. Polo tanto, as medidas do rectángulo son: Longo: x = 8 cm ; Largura: x – 2 = 8 – 2 = 6 cm

S37.

Sexa x a idade actual de Pedro. A súa idade hai 12 anos era (x – 12) e dentro de 12 anos será (x + 12).

As condicións do problema tradúcense na ecuación:

$$x + 12 = \frac{(x-12)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+24}{2} = \frac{(x-12)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 24 = (x-12)^2 \quad \Rightarrow 2x + 24 = x^2 - 24x + 144 \quad =$$

$$-x^2 + 2x + 24x + 24 - 144 = 0 \quad \Rightarrow -x^2 + 26x - 120 = 0$$

$$x = \frac{-26 = \pm\sqrt{26^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-120)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-26 \pm \sqrt{676-480}}{-2} = \frac{-26 \pm \sqrt{196}}{-2} = \frac{-26 \pm 14}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-26+14}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \\ x_2 = \frac{-26-14}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20 \end{cases}$$

A primeira solución non é válida xa que hai 12 anos aínda non nacera, só é válida a segunda: x = 20 anos.

Comprobación:

Idade hai 12 anos: 20 – 12 = 8 anos

Idade dentro de 12 anos: 20 + 12 = 32 anos

Metade do cadrado da idade hai 12 anos: 8^2 : 2 = 64 : 2 = 32 anos

Sistemas de ecuacións

S38.

$\begin{cases}2x-5y-9=0\\7x+4y-10=0\end{cases}$	Resolvemos o sistema por redución multiplicando a primeira ecuación por 4 e a segunda por 5 para obter o mesmo coeficiente en y, pero de signo contrario: $\begin{cases}4(2x-5y-9)=4\cdot 0\\5(7x+4y-10)=5\cdot 0\end{cases}$ Sumando $\begin{array}{l}\begin{cases}8x-20y-36=0\\35x+20y-50=0\end{cases}\\\hline 43x\qquad -86=0\end{array} \Rightarrow x=\frac{86}{43}=2$ Substituín do na segunda ecuación obtemos $7\cdot 2+4y-10=0 \Rightarrow 4y=10-14 \Rightarrow 4y=-4 \Rightarrow y=\frac{-4}{4}=-1$ Solución $x=2,\ y=-1$
$\begin{cases}2x+3y=1\\5y=-3\end{cases}$	Resolvemos o sistema por substitución xa que temos a incógnita y practicamente despexada na segunda ecuación: $\begin{cases}y=\frac{-3}{5}\\2x+3\cdot\frac{(-3)}{5}=1\end{cases} \Rightarrow 2x-\frac{9}{5}=1 \Rightarrow \frac{10x-9}{5}=\frac{5}{5} \Rightarrow 10x-9=5 \Rightarrow 10x=5+9$ $10x=14 \Rightarrow x=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$ *Solución*: $x=\frac{7}{5},\ y=-\frac{3}{5}$
$\begin{cases}-x+11y=12\\x-3y=-6\end{cases}$	Resolvemos o sistema por redución sumando directamente ambas ecuacións para eliminar x: $\begin{array}{l}\begin{cases}-x+11y=12\\\quad x-3y=-6\end{cases}\\\hline \qquad 8y=6\end{array} \Rightarrow y=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ Substituin do na segunda ecuación para despexar x: $x-3\cdot\frac{3}{4}=-6 \Rightarrow \frac{4x-9}{4}=\frac{-24}{4} \Rightarrow 4x-9=-24 \Rightarrow 4x=-24+9$ $4x=-15 \Rightarrow x=-\frac{15}{4}$ Solución $x=-\frac{15}{4},\ y=\frac{3}{4}$
$\begin{cases}x+2y=11\\2x-y=2\end{cases}$	Resolvemos o sistema por redución multiplicando a segunda ecuación por 2 para eliminar y: $\begin{array}{l}\begin{cases}x+2y=11\\4x-2y=4\end{cases}\\\hline 5x\qquad =15\end{array} \Rightarrow x=\frac{15}{5}=3$ Substituin do na segunda ecuación para despexar x: $2\cdot 3-y=2 \Rightarrow 6-y=2 \Rightarrow -6+y=-2 \Rightarrow y=-2+6=4$ Solución $x=3,\ y=4$
$\begin{cases}x-(y+1)=3\\y+(x+3)=4\end{cases}$	Antes de aplicar ningún método operamos para suprimir parénteses e reducir: $\begin{cases}x-y-1=3\\y+x+3=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=3+1\\x+y=4-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=4\\x+y=1\end{cases} \Rightarrow Sumando\ \begin{array}{l}\{x-y=4\\x+y=1\\\hline 2x\ \ =5\end{array} \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ Substituíndo na segunda ecuación para obter y: $\frac{5}{2}+y=1 \Rightarrow y=1-\frac{5}{2}=\frac{2-5}{2}=-\frac{3}{2}$ Solución $x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{2}$

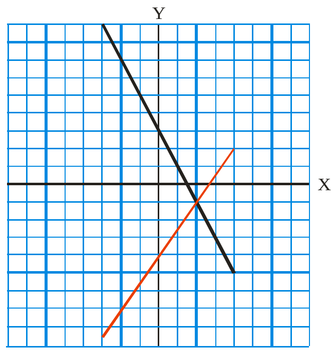
$\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$	Operamos para suprimir parénteses e reducir as ecuacións: $\begin{cases} 10x-20+y=1 \\ x+3x-3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+y=1+20 \\ 4x-3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+y=21 \\ 4x-3y=5 \end{cases} \Rightarrow$ Multiplicamos a primeira ecuación por 3 e sumamos: $\begin{array}{l} \begin{cases} 30x+3y=63 \\ 4x-3y=5 \end{cases} \\ \hline 34x \quad =68 \end{array} \Rightarrow x=\frac{68}{34}=2$ Substituímos na primeira ecuación para despexar y: $10 \cdot 2+y=21 \Rightarrow 20+y=21 \Rightarrow y=21-20=1$ Solución: $x=2,\ y=1$

S39.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{cases}$$

Despexando a variable y en cada unha das ecuacións anteriores e dando valores a x obtemos as seguintes táboas de valores:

$y=3-2x$		$y=\frac{3x-8}{2}$	
x	y	x	y
-2	7	-2	-7
-1	5	-1	-11/2
0	3	0	-4
1	1	1	-5/2
2	-1	2	-1
3	-3	3	½
4	-5	4	2

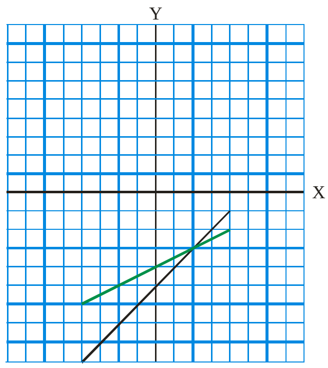


As rectas córtanse no punto (2, -1), polo que a solución do sistema é x = 2, y = -1.

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+8=x \end{cases}$$

Despexando a variable y en cada unha das ecuacións anteriores e dando valores a x obtemos as seguintes táboas de valores:

$y=x-5$		$y=\frac{x-8}{2}$	
x	y	x	y
-3	-8	-3	-11/2
-2	-7	-2	-5
-1	-6	-1	-9/2
0	-5	0	-4
1	-4	1	-7/2
2	-3	2	-3
3	-2	3	-5/2

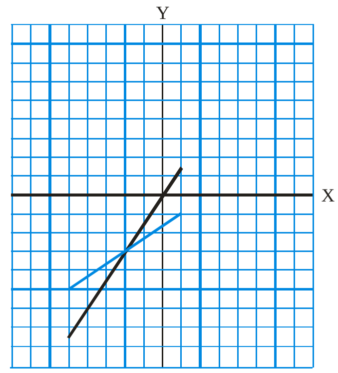


As rectas córtanse no punto (2, -3), polo que a solución do sistema é x = 2, y = -3.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

Despexando a variable y en cada unha das ecuacións anteriores e dando valores a x obtemos as seguintes táboas de valores:

$y = \frac{3x}{2}$		$y = \frac{2x-5}{3}$	
x	y	x	y
-5	-15/2	-5	-5
-4	-6	-4	-13/3
-3	-9/2	-3	-11/3
-2	-3	-2	-3
-1	-3/2	-1	-7/3
0	0	0	-5/3
1	3/2	1	-1

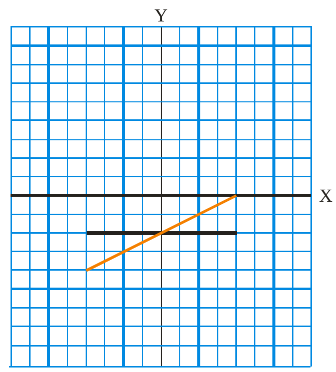


As rectas córtanse no punto (-2, -3). A solución do sistema é x = -2, y = -3.

$$\begin{cases} y = -2 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

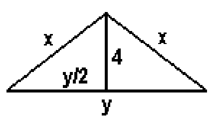
Despexando a variable y en cada unha das ecuacións anteriores e dando valores a x obtemos as seguintes táboas de valores:

$y = -2$		$y = \frac{x-4}{2}$	
x	y	x	y
-3	-2	-3	-7/2
-2	-2	-2	-3
-1	-2	-1	-5/2
0	-2	0	-2
1	-2	1	-3/2
2	-2	2	-1
3	-2	3	-1/2



As rectas córtanse no punto (0, -2), polo que a solución do sistema é x = 0, y = -2.

S40.



Sexa x a medida dos lados iguais e y a medida do lado desigual. Se o perímetro é 16, podemos escribir a ecuación: 2x + y = 16

Ao trazar a altura do triángulo, esta divídeo en dous triángulos rectángulos iguais de catetos 4 e y/2 e de hipotenusa x. Se aplicamos o teorema de Pitágoras nun destes triángulos obtemos a ecuación:

$(y/2)^2 + 4^2 = x^2$

Resolvendo o sistema formado por ambas ecuacións obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y = 16 \\ (y/2)^2 + 4^2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 16 - 2x \\ \left(16 - 2x/2\right)^2 + 16 = x^2 \end{cases} \Rightarrow (16 - 2x)^2 + 64 = 4x^2 \Rightarrow 256 - 64x + 4x^2 + 64 = 4x^2$$

$$4x^2 - 4x^2 - 64x + 256 + 64 = 0 \Rightarrow -64x + 320 = 0 \Rightarrow -64x = -320 \Rightarrow x = \frac{-320}{-64} = 5$$

Polo tanto, a medida dos lados iguais é 5 cm e a medida da base 16 cm – 5 cm – 5 cm = 6 cm

S41.

Sexan x e y os números a determinar. Se un deles é o triplo do outro podemos escribir a ecuación: x = 3y.

A súa suma é (x + y) e a súa diferenza (x – y). Segundo as condición do problema podemos escribir a ecuación: x + y = 2(x – y)

Resolvendo por substitución o sistema de ecuacións obtemos:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 2(x - y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y \\ x + y = 2x - 2y \end{cases} \Rightarrow 3y + y = 2\cdot 3y - 2y \Rightarrow 4y = 6y - 2y \Rightarrow 4y = 4y$$

Esta ecuación cúmprese para calquera valor de y. Xa que logo trátase dun sistema indeterminado con infinitas solucións, no que as dúas ecuacións son equivalentes e que se cumpre para calquera par de números que verifiquen unha das condicións, por exemplo que un número sexa o tripo do outro: 1 e 3, 2 e 6, 3 e 9, etc.

S42.

Sexa x o prezo dun café puro e y o prezo dun café con leite. Segundo as condicións do problema podemos escribir as ecuacións:

2x + 3y = 3,45 4x + y = 3,15

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3{,}45 \\ 4x + y = 3{,}15 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3(3{,}15 - 4x) = 3{,}45 \\ y = 3{,}15 - 4x \end{cases} \Rightarrow 2x + 9{,}45 - 12x = 3{,}45 \Rightarrow 2x - 12x = 3{,}45 - 9{,}45 \Rightarrow -10x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-10} = 0{,}60 \Rightarrow y = 3{,}15 - 4\cdot 0{,}60 = 3{,}15 - 2{,}40 = 0{,}75$$

Daquela, o prezo dun café puro é x = 0,60 € e o dun café con leite y = 0,75 €.

S43.

Sexa x a velocidade á que nada e 10x a velocidade á que corre.

Tendo en conta que neste tipo de movemento se cumpre que: espazo = velocidade·tempo, o espazo percorrido ao correr a unha velocidade 10x durante 10 minutos será: 10x·10 = 100x

De igual modo, o espazo percorrido nadando durante 5 minutos a unha velocidade x será: x·5 = 5x

A suma de ambos espazos será o espazo total percorrido, polo que podemos escribir a ecuación:

$100x + 5x = 4\,410 \rightarrow 105x = 4\,410 \rightarrow x = \frac{4410}{105} = 42\ m/\min$

A velocidade nadando é de 42 m/minuto e correndo 10·42 = 420 m/minuto.

Comprobación:

Espazo percorrido correndo: 420 m/min · 10 min = 4.200 m

Espazo percorrido nadando: 42 m/min · 5 min = 210 m

Espazo total percorrido: 4 200 m + 210 m = 4.410 m

5.3 Solucións dos exercicios de autoavaliación

1. A parábola $y = 3x^2 + 6x$:

- [ ]
- [x] Ten o vértice en $x_v = -1$
- [ ]

2. A parábola $y = -2x^2 + 3$:

- [x] Pasa polo punto (0, 3).
- [ ]
- [ ]

3. As solucións da ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$ son:

- [x] 3 e 5
- [ ]
- [ ]

4. As solucións da ecuación $3x^2 + 6x = 0$ son:

- [ ]
- [ ]
- [x] 0 e -2

5. Das vilas A e B, distantes 132 km, [...]. A que distancia de A se atoparán? En canto tempo?

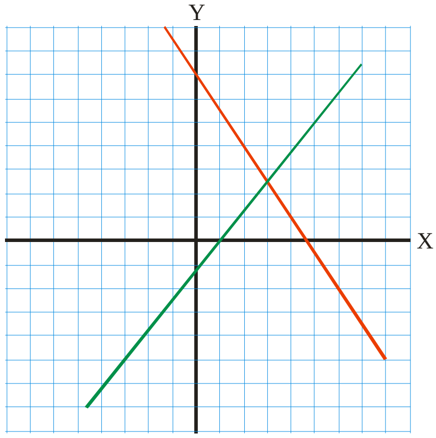
- [ ]
- [ ]
- [x] 76 km, 4 h
- [ ]

6. A solución do sistema é:

- [ ]
- [x] $x = 3$, $y = 5/2$
- [ ]

7. Resolva graficamente o sistema de ecuacións do cadro:

$y = \frac{14-3x}{2}$		$y = \frac{5x-5}{4}$	
x	y	x	y
-2	10	-2	-15/4
-1	17/2	-1	-5/2
0	7	0	-5/4
1	11/2	1	0
2	4	2	5/4
3	5/2	3	5/2
4	1	4	15/4



8. O cociente de dous números é 3/4. [...]. Eses números son:

- ☐
- ☐
- ☑ 45 e 60

9. A suma dun número máis o seu inverso é 37/6. Este número é:

- ☐
- ☐
- ☑ 6

10. A idade de Xosefa era hai seis anos a raíz cadrada da idade que terá dentro de seis anos. Cantos anos ten Xosefa hoxe?

- ☑ 10
- ☐
- ☐

6. Glosario

C

- **Compatible** Sistema de ecuacións que ten solución.
- **Cóncava** Curva con forma aberta cara a abaixo (∩).
- **Convexa** Curva con forma aberta cara a arriba (U).

D

- **Discriminante** Valor da expresión $b^2 – 4ac$ nunha ecuación de segundo grao.

I

- **Incompatible** Sistema de ecuacións que carece de solución.
- **Indeterminado** Sistema de ecuacións que ten infinitas solucións.

P

- **Parábola** Curva asociada ás funcións de tipo $y = ax^2 + bx +c$.
- **Póla** Cada unha das partes da gráfica dunha parábola separadas polo vértice.

V

- **Vértice** Punto da gráfica dunha parábola no que a función alcanza o seu valor máximo (ou mínimo).

7. Bibliografía e recursos

Bibliografía

Os contidos desta unidade pódense ampliar por calquera libro de texto das últimas edicións de Matemáticas de 3º e 4º da ESO. A modo de exemplo propomos os seguintes:

- *Matemáticas* 3º ESO. Editorial Anaya.
- *Matemáticas* 3º ESO. Editorial Rodeira.
- *Matemáticas* 4º ESO. Editorial Rodeira.
- *Matemáticas* 3º ESO. Editorial Santillana.
- *Matemáticas* 4º ESO. Editorial Santillana.

Ligazóns de internet

Entre nalgunha destas páxinas de internet. Nelas pode confirmar todo o que aprendeu sobre parábolas a golpe de rato! Practique modificando os parámetros *a*, *b*, e *c* e observe como cambia a gráfica e a posición do vértice en cada unha.

- [*http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/parabolas_mgmp/parabolas.htm*]
- [*http://mathinsite.bmth.ac.uk/html/applets.html#parabAnchor*] Clic en "parábola".
- [*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Java/Parabola.html*]

Ecuacións de segundo grao:

- [*http://www.aulafacil.com/ecuaciones-segundo-grado/curso/Temario.htm*]
- [*http://matematicasies.com/?-Ecuaciones,6-*]