Límite dunha función nun punto

- límite dunha función nun punto, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ é o número, se existe, ao que se vai aproximando f(x) cando x se aproxima ao punto x_0
- O límite é una operación compatible coas operacións básicas: o límite dunha suma é a suma dos límites, o límite dun produto é o produto dos límites, o límite dun cociente é o cociente dos límites, o límite dunha potencia é a potencia dos límites, etc.
  Esas propiedades permiten calcular de xeito moi doado a maioría dos límites simplemente substituíndo.

Continuidade

Unha función f(x), definida nun intervalo (a,b), é continua nun punto $x_0 \in (a,b)$ cando o límite da función no punto coincide co valor da función: f(x) continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Tódalas funcións elementais definidas por unha soa fórmula son continuas no seu dominio.
- As funcións definidas a cachos poden ser descontinuas nos puntos onde cambia a fórmula.
  Neses casos debemos estudar a continuidade:

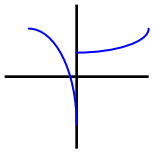
  I.- Límite pola esquerda: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

  II.- Límite pola dereita: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

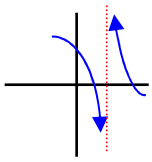
  III.- Valor da función no punto: $f(x_0)$

  Se eses valores coinciden, a función é **continua** en x_0, **descontinua** en caso contrario.
- Unha función é **continua** cando é continua en tódolos puntos do seu dominio.

Tipos de descontinuidades

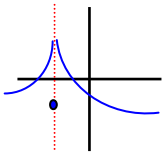


- **Descontinuidade de salto:** límites laterais son distintos: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.



- **De tipo infinito ou de salto de 2ª especie:** Algún dos limites laterais, ou os dous, non existen $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$

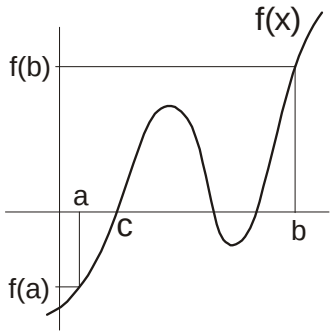
- **Descontinuidade evitable.:** os límites laterais son iguais, pero o valor da función no punto é diferente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$



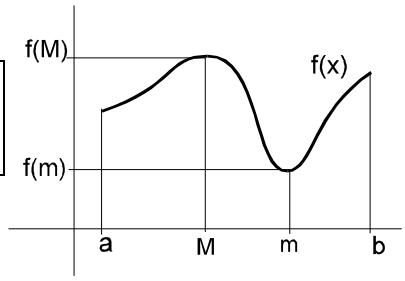
- Graficamente, cando unha función é descontinua nun punto, a súa gráfica está partida nese punto.

Teorema de Bolzano

Se unha función *f* é continua nun intervalo $[a,b]$ e ten valores de signos distintos nos extremos do intervalo, entón hai un punto no interior do intervalo, $c \in (a,b)$, no que a función vale 0: f(c)=0



Consecuencia deste teorema é que unha función continua nun intervalo pechado $[a,b]$ acada tódolos valores comprendidos entre f(a) e f(b).

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Se unha función f(x) é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, entón f(x) acada un máximo e un mínimo nese intervalo.