

Unidade 8: Continuidade

Programa:

- 1 Límite dunha función nun punto.
- 2 Cálculo de límites.
- 3 Concepto de continuidade.
- 4 Funcións continuas.
 - 4.1 Función continua nun punto.
 - 4.2 Tipos de descontinuidades.
 - 4.3 Función continua nun intervalo.
- 5 Teorema de Bolzano.
- 6 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Límite dunha función nun punto

A Teoría da Relatividade de Einstein establece que cando un observador mide a masa dun obxecto en movemento, o resultado que obtén depende da velocidade coa que ese corpo se move en relación ao observador segundo a fórmula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{Onde:}$$

- m_0 é a masa en repouso do obxecto -unha constante-.
- c é a velocidade da luz no baleiro (300.000 km/s).
- v é a velocidade do obxecto en relación ao observador.

Se calculamos a masa a una velocidade baixa, por exemplo 60 km/h (uns 17 m/s), observamos que é practicamente igual a masa en repouso:

$$m_{17} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{17^2}{(10^{12})^2}}} \approx \frac{m_0}{1}$$

En realidade, o denominador da fracción non é exactamente igual a 1, pero a diferenza é tan pequena que teríamos que chegar á cifra decimal que ocupa o lugar 250 e, loxicamente, non podemos apreciála.

Se a velocidade é maior, por exemplo 100.000 km/h (uns 27778m/s, velocidade coa que se despraza a Terra polo espazo), obtemos:

$$m_{27778} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{27778^2}{(10^{12})^2}}} \approx \frac{m_0}{0.999999999999999966923}$$

Neste caso o denominador é lixeiramente menor de 1 –habería que chegar á 16ª cifra decimal para apreciálo-, o que significa que a masa, o cociente, será lixeiramente maior que a masa en repouso.

Se quixésemos calcular cal sería masa se o móbil se desprazase á velocidade da luz, atopámonos cunha división entre 0, que é una operación que non ten senso:

$$m_c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(10^{12})^2}{(10^{12})^2}}} = \frac{m_0}{0} = ?$$

Non podemos calcular o resultado cando a velocidade é a da luz, pero podemos dar valores que se aproximen e observar o que sucede:

Velocidade	Masa
0'5·c (metade da velocidade da luz)	1'15 m_0 (15% mais ca masa en repouso)
0'9·c (10% menos ca velocidade da luz)	2'29 m_0 (mais do dobre da masa en repouso)
0'99·c (1% menos ca velocidade da luz)	7'01 m_0 (7 veces a masa en repouso)
0'9999·c (0'01% menos ca velocidade da luz)	70 m_0 (70 veces a masa en repouso)
...	...

Vemos que ao achegarse á velocidade da luz a masa do obxecto vaise facendo cada vez maior, e podemos conxectar que ese aumento é “ilimitado”. De feito, una das consecuencias do anterior, é que un obxecto con masa en repouso non pode acadar a velocidade da luz (necesitárianse cantidades de enerxía cada vez maiores para aceleralo ao ir aumentando a súa masa). As viaxes espaciais, tal como aparecen nas películas de ciencia ficción, son imposibles.

Se a masa en repouso fose 0, teríamos a expresión:

$$m_c = \frac{m_0}{0} = \frac{0}{0} = ?, \text{ cuxo significado intentaremos clarexar.}$$

Cando, para calcularmos o resultado dunha expresión para un valor (punto) concreto, imos dando valores que se aproximan a ese valor, empregamos un procedemento dunha enorme importancia en Matemáticas que se coñece como límite:

Definimos o límite dunha función nun punto, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, como o número, se existe, ao que se vai aproximando $f(x)$ cando x se aproxima ao punto x_0 (leremos: “cando x tende a x_0 ”)

Cálculo de límites

O límite é una operación compatible coas operacións básicas:

- O límite dunha suma é a suma dos límites.
- O límite dun produto é o produto dos límites.
- O límite dun cociente é o cociente dos límites.
- O límite dunha potencia é a potencia dos límites.
- Etc.

Esas propiedades permiten calcular de xeito moi doado a maioría dos límites.

Exemplo:

Calcula o límite da función $f(x) = 2x^3 + 4x$ cando x tende a 3

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 + 4x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3) + \lim_{x \rightarrow 3} (4x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x^3) + \lim_{x \rightarrow 3} (4) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 3} (x) \right]^3 + \lim_{x \rightarrow 3} (4) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x) = 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 = 66 \end{aligned}$$

Observa que todo o proceso equivale a substituír a x por 3 na función:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 + 4x) = 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 = 66$$

O último paso obtense de:

- Obviamente $\lim_{x \rightarrow 3} (2)$ é 2, e $\lim_{x \rightarrow 3} (4)$ é 4 pois as expresións as que lles calculamos o límite non varían ao variar x .
- $\lim_{x \rightarrow 3} (x)$ ten necesariamente será o propio 3.

Exemplo:

Calcular o límite da función $f(x) = \frac{4x-4}{x^2-1}$ cando x tende a 1

Solución:

Intentamos facelo directamente, substituíndo a x por 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x-4}{x^2-1} \right) = \frac{4-4}{1-1} = \frac{0}{0} = ?$$

Nesta ocasión, a aplicación das propiedades do límite non nos conduce a ningún resultado pois obtemos nunha expresión que pode ter calquera resultado.

Ese tipo de límites chámanse INDETERMINADOS e para o seu cálculo precisan de procedementos especiais ou podemos tamén aplicar a definición de límite e ver que sucede:

x	$f(x) = \frac{4x-4}{x^2-1}$
2	1'333333
1'1	1'90476...
1'003	1'997004...
1'00001	1'99999...
...	...

Observamos que, ao ir achegándose a x a 1, o valor da función achégase a 2: o límite será, pois, 2.

Un procedemento especial sería cambiar a expresión da función por outra que fose equivalente:

$$f(x) = \frac{4x-4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} \xrightarrow{\text{se } x \text{ fose } 1} \frac{4}{1+1} = 2$$

Exemplo:

Calcular o límite da función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cando x tende a 1

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} \right) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = ?$$

Nesta ocasión, obtemos unha operación que NON pode ter ningún resultado. Comprobamos que sucede ao aplicar a definición de límite:

x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$		x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
2	1		0	-1
1'1	10		0'9	-10
1'003	333.33		0'997	-333.33
1'00001	10000		0'99999	-10000
...

Observamos que, ao ir achegándose a x a 1, o valor da función faise cada vez maior (ou menor, cando se achega pola esquerda, xa que dá resultados negativos). Este tipo de límites non existen, non se achegan a ningún número, pero como o seu comportamento é característico denomínanse de tipo INFINITO.

Escribiremos: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \pm\infty$

e podemos diferenciar os dous casos: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right) = +\infty \end{array} \right.$

1^- : un pouco menos ca 1, pola esquerda.

1^+ : un pouco máis ca 1, pola dereita.

Continuidade

A continuidade é unha medida da regularidade dunha función.

Que unha función sexa continua significa que a unha variación pequena da x corresponde unha variación tamén pequena no valor da función. Fíxate na seguinte táboa de valores da función $f(x)=x^2$:

x	$f(x)=x^2$	x	$f(x)=x^2$
1'8	3'24	2'2	4'84
1'9	3'61	2'1	4'41
2	4	2'01	4'04

Unha función $f(x)$, definida nun intervalo (a,b) , é continua nun punto $x_0 \in (a,b)$ cando o límite da función no punto coincide co valor da función: $f(x)$ continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- Fíxate que non ten sentido falar de continuidade nun punto onde non está definida a función.
- Tódalas funcións elementais definidas por unha soa fórmula son continuas no seu dominio.

Das funcións que coñeces, as únicas que poden ser descontinuas en algún punto son as funcións definidas a cachos, que poden ser descontinuas nos puntos onde cambia a fórmula.

Para estudar a continuidade de funcións definidas a cachos utilizaremos os **límites laterais** e o valor da función no punto:

I.- Límite pola esquerda: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

II.- Límite pola dereita: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

III.- Valor da función no punto: $f(x_0)$

Se eses valores coinciden, a función é **continua** en x_0 e, en caso contrario é **descontinua**.

Definición: Diremos que unha función é **continua** cando é continua en tódolos puntos do seu dominio.

Se unha función é continua nun intervalo, a parte da gráfica da función correspondente a ese intervalo é unha liña seguida.

Exemplo:

Estudar a continuidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

O dominio da función son todos os números reais:

- Agás en $x=2$, a función é elemental, tanto na súa parte esquerda como na dereita. É, polo tanto, continua en todos eses puntos.

- En $x=2$ a fórmula da función é diferente a cada lado, polo que é necesario estudar por separado que sucede cando x se achega a 2 con valores menores (pola esquerda) e con valores maiores (pola dereita):

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2) = 4$$

Dado que os valores coinciden, existe o límite da función en $x=2$ e é 4: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Para comprobar a continuidade, só resta comprobar que o límite coincide co valor da función:

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

A función $f(x)$ é continua tamén en $x=2$.

Tipos de descontinuidades

- Descontinuidade de salto:** Os límites laterais existen pero son distintos: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

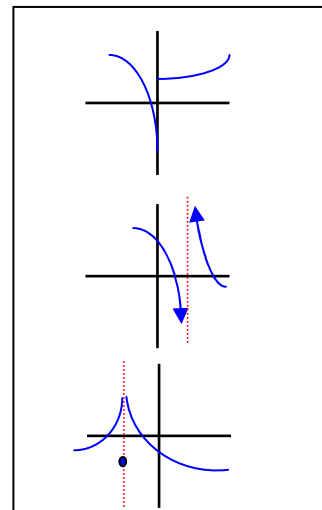
- De tipo infinito ou de salto de 2ª especie:** Algún dos límites laterais, ou os dous, non existen:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

- Descontinuidade evitable:** Os límites laterais existen e son iguais, pero o valor da función no punto é diferente.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Graficamente, cando unha función é descontinua nun punto, a súa gráfica está partida nese punto.



Exemplo:

Estudar a continuidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Solución:

- A función está definida en todo \mathbb{R} .
- É continua en todos os puntos do dominio agás en $x=-1$ por ser elemental nun entorno deses puntos.
- En $x=-1$ debemos estudar que sucede:
 - Calculamos o límite da función en $x=-1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

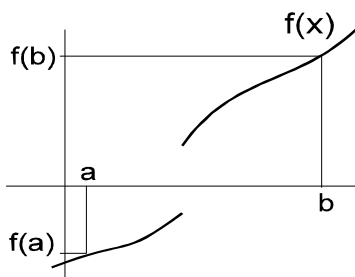
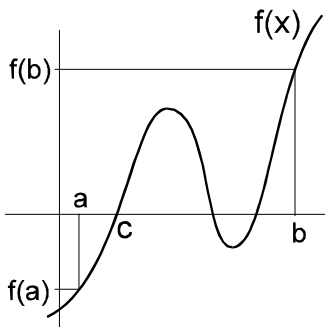
↓

descompoñemos en factores para
simplificar a fracción

↓

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

- Calculamos o valor da función en $x=-1$: $f(-1)=1$
- Polo tanto é descontinua de tipo evitable en $x=1$.



Teorema de Bolzano

Se unha función f é continua nun intervalo $[a, b]$ e ten valores de signos distintos nos extremos do intervalo, entón hai un punto no intervalo, $c \in (a, b)$, no que a función vale 0: $f(c)=0$

(Produto dos valores nos extremos negativo: $f(a) \cdot f(b) < 0$)

Non podemos unir os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ cunha liña continua sen cortar o eixe OX. O teorema garante a existencia dun punto de corte, pero pode haber máis.

Temos que esixir a continuidade pois, se a función non é continua no intervalo, pode non cortar o eixe tal como aparece na segunda gráfica.

O teorema proporciona un método para calcular solucións aproximadas a ecuacións do tipo $f(x)=0$ ($f(x)$ continua) buscando pares de valores nos que a función tome signos contrarios.

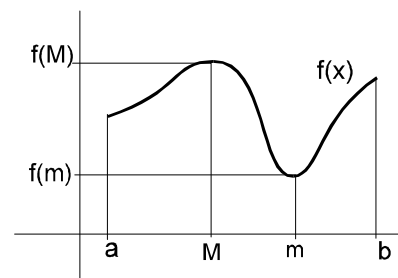
Consecuencia deste teorema é que unha función continua nun intervalo pechado $[a, b]$ acada tódolos valores comprendidos entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Se unha función $f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, entón $f(x)$ acada un máximo e un mínimo nese intervalo. É dicir:

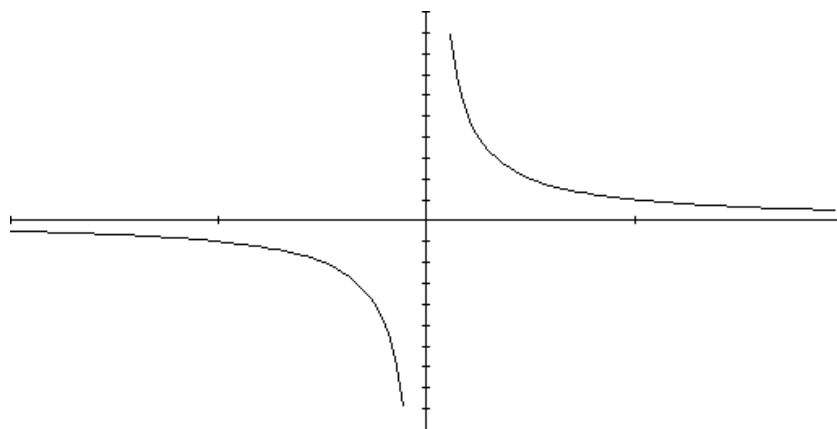
$$\exists m \in [a,b] \text{ tal que } \forall x \in [a,b] \quad f(m) \leq f(x)$$

$$\exists M \in [a,b] \text{ tal que } \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(M)$$



Fíxate que, se a función non é continua ou se o intervalo non é pechado, o teorema pode non cumprirse. A función $f(x) = \frac{1}{x}$ é continua no intervalo $(0,2]$ pero non ten máximo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty$

Vemos a súa representación gráfica:



Non hai valor máximo porque “vaise” ao infinito pola dereita de 0.

Non hai valor mínimo porque “vaise” a menos infinito pola esquerda de 0.