

Unidade 4: Método de Gauss

Programa:

- 1 Sistema de ecuacións lineais.**
 - 1.1 Solución dun sistema.**
 - 1.2 Sistemas equivalentes.**
 - 1.3 Tipos de sistemas.**
- 2 Resolución de sistemas.**
 - 2.1 Sistemas 2x2: Método de reducción.**
 - 2.2 Sistemas nxm: Método de Gauss.**
- 3 Rango dunha matriz**
- 4 Inversa dunha matriz**

Método de Gauss

A resolución de sistemas de ecuacións é un problema habitual en moitas situacións.

Como xa estudamos, a Regra de Cramer e o Teorema de Rouché Frobenius proporcionan un método de resolución baseado na utilización de determinantes e no estudo dos rangos das matrices do sistema.

Cando o sistema é moi grande, eses métodos son enormemente laboriosos pola gran cantidade de cálculos que precisan.

O método de Gauss é, basicamente, un método de resolución de ecuacións que consiste na aplicación automatizada do método de redución e que, ademais de resolver sistemas de ecuacións, permite estudar rangos de matrices e calcular a matriz inversa de xeito moito máis eficiente que os métodos que xa coñeces

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ -x + 5y = -1 \end{array} \right\}$$

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z + 2w = 1 \\ 5x + y + 3z - 4w = -3 \\ -y + 2z - w = 0 \end{array} \right\}$$

Sistemas de ecuacións lineais

Como sabes, unha ecuación é unha igualdade na que algunhas cantidades descoñecidas son substituídas por incógnitas.

Hai varios tipos de ecuacións dependendo de cales sexan as operacións que lles afectan ás incógnitas: De primeiro grao, de segundo grao, irracionais, etc.

Cando as *incógnitas* só están multiplicadas por números e logo sumados eses produtos, as ecuacións chámanse **lineais**, ($2x+5y=4$).

Un conxunto de ecuacións lineais relativas a unha mesma situación forma un **sistema de ecuacións lineais**:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right\}$$

Ecuacións equivalentes

Definición: O conxunto formado por tódolos valores das incógnitas que verifiquen as ecuacións chamarémoslle **conxunto de solucións**.

Definición: Diremos que dúas ecuacións son **equivalentes** cando teñen o mesmo conxunto de solucións.

Cando resolvemos unha ecuación ou un sistema, imos transformando as ecuacións noutras equivalentes, pero máis simples, ata finalmente termos despexadas as incógnitas.

Hai moitas transformacións que se poden efectuar nunha ecuación ou nun sistema, sen cambia-lo seu conxunto de solucións:

Nunha ecuación:

- Multiplicar ou dividir toda a ecuación por un número.
- Sumar un número ós dous membros da ecuación.

En xeral, tódalas transformacións que afecten por igual ós dous membros da ecuación son transformacións permitidas.

Nun sistema:

- Substituír unha das ecuacións pola suma desa ecuación e outras ecuacións multiplicadas por números.
- Substituír unha variable por unha expresión equivalente.
- Despexar unha variable en varias ecuacións e iguala-las expresións que se obteñen.

Resolución de sistemas 2x2

Un dos métodos máis empregados para a resolución de sistemas é o de redución:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 2x + 5y = 4 \\ 3x + 6y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \cdot 3 \rightarrow 6x + 15y = 12 \\ 2^a \cdot (-2) \rightarrow -6x - 12y = -4 \end{array} \left. \begin{array}{l} 6x + 15y = 12 \\ 3y = 8 \end{array} \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad 3y = 8 \rightarrow y = \frac{8}{3} \\ & \qquad \qquad \qquad 6x + 15 \cdot \frac{8}{3} = 12 \rightarrow x = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ -x - y = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a + 2^a \rightarrow x = 3 \\ \text{Substituíndo} \rightarrow y = -2 \end{array}$$

O conxunto de solucións dese sistema está formado só polo elemento (3,-2)

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x^2 - y = 0 \end{array} \right\} x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4 \end{cases}$$

O conxunto de solucións é:

$$S = \{(0,0), (2,4)\}$$

Se te fixas, o papel do x e do y ó resolve-lo sistema é case decorativo. Podemos formulalo todo sen escribilas, soamente tendo en conta o papel que xogan os distintos coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 & 12 \\ -6 & -12 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3y = 8 \rightarrow y = \frac{8}{3}$$

$$6x + 15 \cdot \frac{8}{3} = 12 \rightarrow x = -\frac{14}{3}$$

Este xeito de resolver un sistema de ecuacións lineais, xeneralizado para calquera número de ecuacións e incógnitas, coñécese co nome de: **Método de Gauss**. Consiste, como podes ver, en aplicar o método de redución e simplifica-la escritura evitando escribi-las incógnitas.

Método de Gauss

Vexamos como funciona cun sistema de 3x3 (3 ecuacións e 3 incógnitas):

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 12 \\ x + 5y + 2z = -1 \\ 5x + y - 2z = -5 \end{cases}$$

1. Escribir o sistema sen as *incógnitas*. É preferible que, de ser posible, o elemento 1,1 (1ª fila, 1ª columna) sexa 1 ou -1. Para conseguilo, cambiamos a orde das ecuacións ou das incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 12 \\ x + 5y + 2z = -1 \\ 5x + y - 2z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemplo:

Os elementos 1, -3 e -2 forman a diagonal da matriz dos coeficientes do sistema anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Fíxate que cada fila corresponde a unha ecuación e cada columna os coeficientes dunha das incógnitas.

Chamarémolles **matriz** a un conxunto de números colocados por filas e columnas como o anterior.

Os elementos que teñen os índices iguais (1ª fila 1ª columna, 2ª fila 2ª columna, ...) forman a **diagonal** principal da matriz.

O obxectivo do Método de Gauss é ir transformando a matriz dos coeficientes do sistema ata que tódolos elementos situados por debaixo da diagonal sexan 0.

2. Facemos 0 os elementos por debaixo do 1,1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2^a - 1^a \cdot 2 \\ 3^a - 1^a \cdot 5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -24 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos simplificar a terceira fila (ecuación):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -24 & -12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3^a : 12} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

3. Facemos 0 ós situados por debaixo do elemento 2,2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3^a \cdot 13 - 2^a \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & -28 \end{array}\right)$$

4. Continúase ata que tódolos elementos por debaixo da diagonal sexan 0. Neste caso xa rematamos.
5. Na última ecuación só nos queda unha incógnita co coeficiente non nulo. Agora xa podemos escribir o sistema do xeito habitual e resolvemo:

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y + 2z = -1 \\ -13y - 3z = 14 \\ -7z = -28 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \frac{-28}{-7} = 4 \\ \rightarrow -13y - 12 = 14 \Rightarrow y = \frac{26}{-13} = -2 \\ x - 10 + 8 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

No caso anterior, a matriz dos coeficientes quedou triangular (3 columnas e 3 filas non nulas) pero iso non ter por que ser así:

- * Se aparece algunha fila na que tódolos elementos sexan 0 agás o termo independente, o sistema é incompatible.
- * Se quedan menos filas non nulas que incógnitas, o sistema é indeterminado. Para resolvemo, deixamos tantas incógnitas como filas non nulas e transformamos as demais en parámetros:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema indeterminado}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z + 2t = 5 \\ 2z - 4t = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{y=\alpha \\ t=\beta}} \left. \begin{array}{l} x + 3z = 5 + \alpha - 2\beta \\ 2z = -2 - 4\beta \\ y = \alpha \\ t = \beta \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 + \alpha + 4\beta \\ z = -1 - 2\beta \\ y = \alpha \\ t = \beta \end{array} \right\} \text{ As solucións obtéñense dándolle valores os parámetros } \alpha \text{ e } \beta$$

Exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Exemplo:

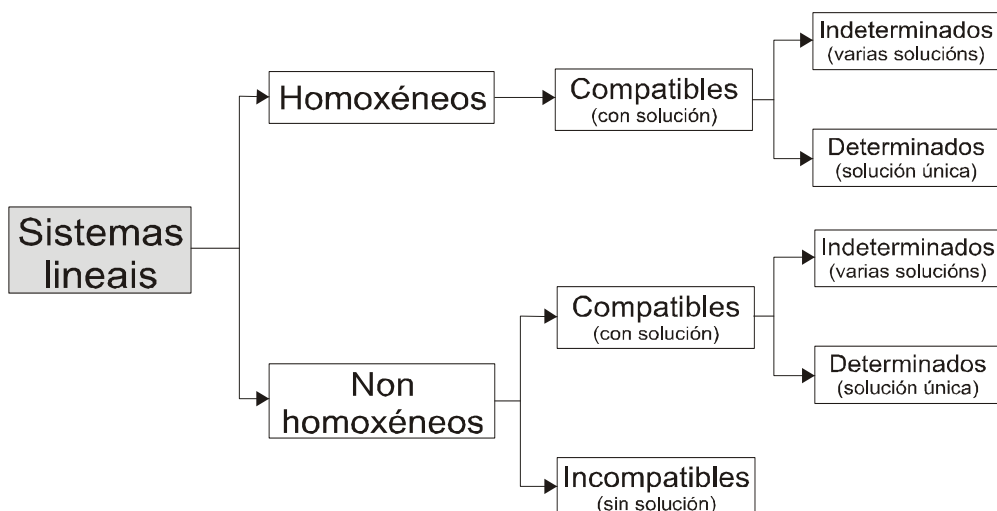
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

Clases de sistemas lineais

Atendendo ó número de solucións, un sistema de ecuacións lineais pode ser:

- **Compatible determinado:** O sistema ten unha única solución (ó aplicar Gauss a matriz queda triangular, tódolos elementos situados debaixo da diagonal son 0).
- **Compatible indeterminado:** O sistema ten moitas solucións (a matriz queda triangular pero con menos filas non nulas ca incógnitas).
- **Incompatible:** O sistema non ten solución (os elementos dunha fila da matriz son 0 agás o termo independente).

Lembra que os **sistemas homoxéneos**, que teñen tódolos termos independentes 0, sempre teñen, polo menos, a solución na que as incógnitas valen 0 (solución trivial). Polo tanto, sempre son compatibles.



Estudo do rango dunha matriz

Podemos empregar o método de Gauss para estudar o rango de calquera matriz, a única diferenza será que non teremos columnas de termos independentes.

O rango será o número de filas non nulas que obteñamos.

Exemplo:

Estuda o rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a + 1^a \cdot 3 \\ 3^a + 1^a \\ 4^a - 1^a \cdot 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3^a - 2^a \\ 4^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O rango da matriz é 2

Cálculo da matriz inversa

Todas as ecuacións matriciais pódense transformar en sistemas de ecuacións e o cálculo da matriz inversa non é unha excepción.

A matriz inversa dunha matriz cadrada A é outra matriz A^{-1} da mesma orde que debe verificar que $A \cdot A^{-1} = I$

Calculemos a inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

A inversa será outra matriz 2x2: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{facendo o produto}} \begin{pmatrix} 2x_{11} - x_{21} & 2x_{12} - x_{22} \\ -3x_{11} + 2x_{21} & -3x_{12} + 2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as compoñentes das dúas matrices:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_{11} - x_{21} = 1 \\ -3x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ \hline 2x_{12} - x_{22} = 1 \\ -3x_{12} + 2x_{22} = 0 \end{array} \right.$$

Obtemos un sistema de catro ecuacións con catro incógnitas pero é un sistema moi particular:

- Podemos dividilo en dous sistemas de dúas ecuacións con dúas incógnitas.
- Agás o nome das incógnitas e os termos independentes, as ecuacións coinciden polo que, se empregamos o método de Gauss as transformacións para resolvelos serán as mesmas.
- Os coeficientes deses sistemas son os da matriz orixinal

Podemos pois resolver os dous sistemas ao mesmo tempo simplemente poñendo dúas columnas de termos independentes:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow 1^a \cdot 3 + 2^a \cdot 2 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

Podemos continuar ata ter as incógnitas totalmente despexadas transformando a matriz do sistema na matriz identidade:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow 1^a + 2^a \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow 1^a / 2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

A matriz inversa será $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Debes ter en conta que, ao aplicar este método, non podes cambiar a orde das ecuacións nin das incógnitas.

Exemplo:

Calcula, empregando o método de Gauss, a matriz inversa

de: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resposta:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2^a + 1^a \cdot 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 4 & 1 & 0 \\ 3^a + 1^a \cdot 3 & 0 & 2 & 6 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 4 & 1 & 0 \\ 3^a - 2^a & 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a - 3^a \cdot 2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 9 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{2^a / 2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 9/2 & 3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se comparas as operacións realizadas coas que deberías facer empregando a fórmula que aprendestes na unidade 1 (calcular o determinante, a trasposta, a adxunta e dividir polo determinante), observarás que son moitas menos. Este é un método máis rápido se ben é máis doado cometer erros.