

Exercicios de autoavaliación

1) a) Dadas as matrices sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Resolve a seguinte ecuación matricial: $A \cdot X + B = C$ onde X é unha matriz descoñecida.

b) ¿Existe unha matriz Y de xeito que $Y \cdot A + B = C$?

2) Estuda para que valores de k ten inversa a matriz A e calcula a inversa no caso $k=2$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

3) Dúas matrices A e B conmutan se $A \cdot B = B \cdot A$. Obter as matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan coa matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Calcula os valores dos parámetros a e b para que a matriz A teña rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

5) Estuda segundo os valores de k cal é o rango da matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Exercicios autoavaliación

- 1) a) Dadas as matrices sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Resolve a seguinte ecuación matricial: $A \cdot X + B = C$ onde X é unha matriz descoñecida.

Resolución:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para despegar X temos que multiplicar pola inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que pode non existir:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| &= 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Ten inversa, calculámola: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{trasposta}} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{adxunta}} \text{Adx}(A^t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fíxate que ao non ser conmutativo o produto de matrices, é necesario ter moi en conta o lado polo que hai que multiplicar.

b) ¿Existe unha matriz Y de xeito que $Y \cdot A + B = C$?

Comprobemos se as ordes das matrices son compatibles

s:

- $Y \cdot A$ ten que ter orde 2×3 para que se poida sumar con B.
- A ten orde 2×2 , polo que Y debe ter orde $n \times 2$ para poder multiplicarse $Y \cdot A$.
- A orde de $Y \cdot A$ é polo tanto $n \times 2$ e, de ningún xeito, pode ser 2×3 polo que non pode existir a matriz Y nas condicións do problema.

2) Estuda para que valores de k ten inversa a matriz A, e calcula a inversa no caso $k=2$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Resolución: Sabemos que unha matriz ten inversa se, e só se, o seu determinante é distinto de 0, polo tanto só temos que estudar para que valores de k o determinante é 0.

$$\left| \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix} \right| = -2k^2 + 4k + 8$$

$$-2k^2 + 4k + 8 = 0 \rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{-4} = \begin{cases} k_1 = 1 + \sqrt{5} \\ k_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

A matriz non ten inversa cando $k = 1 \pm \sqrt{5}$.

Calculémo-la inversa cando $k=2$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 8 = 8$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) Dúas matrices A e B conmutan se $A \cdot B = B \cdot A$. Obter as matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan coa matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolución:

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Facendo os produtos e igualando as compoñentes queda:

$$\begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ c-d & 3c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = a+3c \\ 3a+2b = b+3d \\ c-d = -a+2c \\ 3c+2d = -b+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3c = 0 \\ 3a+b-3d = 0 \\ a-c-d = 0 \\ b+3c = 0 \end{cases}$$

Obtemos un sistema de 3 ecuacións e 4 incógnitas (a 1ª e a 4ª son a mesma):

$$\left. \begin{matrix} b+3c = 0 \\ 3a+b-3d = 0 \\ a-c-d = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 3a-3c-3d = 0 \\ a-c-d = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} b = -3c \end{matrix}$$

Ao substituír, a 2ª ecuación resulta equivalente á 3ª (2ª = 3ª multiplicada por 3).

É un sistema compatible indeterminado. Soamente nos quedan dúas ecuacións:

$$\left. \begin{matrix} b = -3c \\ a - c - d = 0 \end{matrix} \right\} \text{ só podemos despxear dúas das incógnitas en función das outras:}$$

$$\text{en función de } c \text{ e } d: \left. \begin{matrix} b = -3c \\ a = c + d \end{matrix} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} c+d & -3c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sen que o resultado cambie, con frecuencia fálase de “parámetros”:

$$\left. \begin{matrix} c = r \\ d = s \end{matrix} \right\} \text{ parámetros} \rightarrow \begin{cases} a = r+s \\ b = -3r \\ c = r \\ d = s \end{cases} A = \begin{pmatrix} r+s & -3r \\ r & s \end{pmatrix}$$

4) Calcula os valores dos parámetros

a e b para que a matriz A teña rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Resolución: Calculamos o rango de A por menores:

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A \geq 2$$

Estudamos os menores de orde 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & a & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3a - 2a = 3 + a \Rightarrow (\text{Se } a \neq -3 \Rightarrow \text{Rango de } A = 3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & b \end{vmatrix} = a - b \Rightarrow (\text{Se } b \neq a \Rightarrow \text{Rango de } A = 3)$$

Polo tanto, para que o rango de A sexa 2 ten que ser $a = -3$ e $b = a$, é dicir $b = -3$.

5) Estuda segundo os valores de k cal é o rango da seguinte matriz:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Resolución: Como A é unha matriz cadrada, estudamos cando o seu rango é 3 (determinante distinto de 0):

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2$$

Temos unha ecuación de 3º grao, que podemos intentar resolver por Ruffini:

$$k^3 - 3k + 2 = 0 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \right|$$

$$(k-1) \cdot (k^2 + k - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_3 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 1: $k \neq 1$ e $k \neq -2$. O determinante de A é distinto de 0, polo tanto o rango é 3.

Caso 2: $k=1$. Queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, o rango é 1 (só hai unha fila independente).

Caso 3: $k=-2$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |-2| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } A = 2 \end{cases}$$

(Xa sabemos que o rango de A non pode ser 3 porque o seu determinante é 0).

6) Calcula o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución: Desenvolvémolo pola 4ª columna (ten un 0):

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ & 0 \cdot \dots + 5 \cdot (-1)^{2+4} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| + 7 \cdot (-1)^{3+4} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| + (-1)^{4+4} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \\ & 0 + 5 \cdot (4 - 6 + 6 + 2) - 7 \cdot (-4 + 2 - 6 - 8) + (6 - 1 - 12 + 3 + 12 - 2) = 148 \end{aligned}$$

Outro xeito de transformar a matriz sen alterar o valor do determinante, procurando que nunha fila (ou nunha columna) obteñamos varios elementos 0, para que logo os cálculos sexan rápidos.

Por exemplo, sumando combinacións lineais das demais filas (ou columnas):

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} & \stackrel{2^a \text{ fila} + 1^a \text{ fila} \rightarrow}{\stackrel{3^a \text{ fila} - 1^a \text{ fila} \rightarrow}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 & \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{desenvolvendo} \\ \text{pola 2ª columna}}}{=} -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 148
 \end{aligned}$$

(Así so temos que calcular este “menor”, xa que os outros termos serían 0·...)