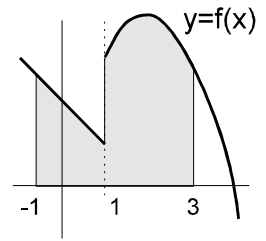


# Exercicios de autoavaliación

1 Na figura aparece a gráfica da función  $f(x)$  discontinua en  $x=1$ :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2+4x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Calcula a área baixo da gráfica entre  $x=-1$  e  $x=3$ .



**Solución:**

Só temos que dividir o intervalo en dous e calcular a área en cada un dos subintervalos:

$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (-x+2)dx = \left( -\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \left( -\frac{1}{2} + 2 \right) - \left( -\frac{1}{2} - 2 \right) = 4$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (-x^2+4x)dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_1^3 = \left( -9 + 18 \right) - \left( -\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{22}{3}$$

Finalmente, sumaremos:  $4 + \frac{22}{3} = \frac{34}{3}$

2 A velocidade dun móbil segundo o tempo vén dada pola función:  $v(x) = 2x^2 + 3$  sendo  $x$  o tempo en segundos e  $v(x)$  a velocidade en m/s.

- Calcula o espazo percorrido durante os 5 primeiros segundos.
- Cal foi a velocidade media durante eses primeiros 5 segundos?
- Pódese aplicar o Teorema do Valor Medio á función  $v(x)$  no intervalo  $[0,5]$ ? Nese caso, atopa o valor de  $c$  do que fala o teorema.
- A que velocidade ía o móbil no intre  $c$  do apartado anterior?
- É casualidade que esa velocidade coincida coa velocidade media? Xustifica a resposta.

**Solución:**

a) Como  $e'(x)=v(x)$ , o espazo percorrido entre 0 e 5 vén dado pola integral:

$$e_{[0,5]} = \int_0^5 v(x)dx = \int_0^5 (2x^2 + 3)dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^5 = \frac{2}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5 - \left( \frac{2}{3} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 \right) = \frac{295}{3}m$$

b) A velocidade media corresponde ao espazo percorrido entre o tempo empregado:

Nese intervalo foi:

$$VM_{[0,5]} = \frac{\frac{295}{3}}{5-0} = \frac{59}{3} \text{ m/s}$$

c) As hipóteses do teorema do valor medio son que a función sexa positiva e continua no intervalo. Neste caso vemos que a función cumpre esas hipóteses:

1.  $v(x)$  é positiva para calquera valor de  $x$  por ser a suma de números positivos (un cadrado multiplicado por 2 e un número positivo).
2. É continua en todo  $\mathbb{R}$  por ser unha función polinómica, polo tanto é continua en  $[0,5]$ .

Polo tanto podemos aplicarlle a  $v(x)$  o Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral:

$$\exists c \in [0,5] \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad \int_0^5 v(x) dx = v(c)(5-0)$$

$$\int_0^5 v(x) dx = v(c)(5-0) \Rightarrow \frac{295}{3} = (2c^2 + 3) \cdot 5 \Rightarrow 2c^2 + 3 = \frac{59}{3} \Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{25}{3}}$$

$$\text{o } c \text{ que buscamos é } \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2'8868 \text{ s}$$

d) 
$$v\left(\sqrt{\frac{25}{3}}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{25}{3}}\right)^2 + 3 = \frac{50}{3} + 3 = \frac{59}{3} \text{ m/s}$$

e) Non é en absoluto unha casualidade. Se no Teorema do Valor Medio dividimos entre a lonxitude

do intervalo queda: 
$$\int_0^5 v(x) dx = v(c)(5-0) \Leftrightarrow v(c) = \frac{\int_0^5 v(x) dx}{5-0}$$

É dicir,  $v(c)$  é xustamente a velocidade media no intervalo  $[0,5]$ .

Nota: Nalgúns textos o resultado anterior aparece como “interpretación física do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral”: Se a velocidade dun móbil é unha función continua do tempo, hai algún punto da súa traxectoria na que a velocidade instantánea coincide coa velocidade media.

**3** É aplicable o Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral á función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  no intervalo  $[0,1]$ ? En caso afirmativo comproba a súa verificación.

**Solución:**

Comprobamos que  $f(x)$  verifica as hipóteses do teorema: positiva e continua no intervalo?.

1.-  $f(x)$  é un cociente no que o denominador é sempre positivo (raíz cadrada positiva dun número positivo) e o numerador é positivo cando  $x \geq 0$ . Polo tanto en  $[0,1]$ ,  $f(x) \geq 0$

2.-  $f(x)$  é unha función elemental, polo tanto continua en tódolos puntos do seu dominio que é

$$\text{todo } \mathbb{R}: 1+x^2 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} & \text{existe sempre por ser } (1+x^2 \geq 0). \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{existe sempre por ser } (\sqrt{1+x^2} \neq 0) \end{cases}$$

Polo tanto  $f(x)$  é continua en  $[0,1] \subset \mathbb{R}$ .

Para comprobar que se cumpre o teorema debemos atopar un valor  $c \in [0,1]$  tal que:

$$\int_0^1 f(x) dx = f(c) \cdot (1-0)$$

Empezamos por calcula-lo valor da integral, para o que se necesita unha primitiva da función:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ 1+x^2=t \\ 2x dx=dt}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+1^2} - \sqrt{1+0^2} = \sqrt{2} - 1$$

Temos que atopar o valor do  $c$  que verifique as condicións do teorema:

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot (1-0) = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{c^2}{1+c^2} = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow \frac{c^2}{1+c^2} = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow c^2 = (3 - 2\sqrt{2})c^2 + 3 - 2\sqrt{2}$$

$$[1 - (3 - 2\sqrt{2})]c^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}}} \approx 0.4551 \in [0,1]$$

**4** Calcula a área limitada pola parábola  $2y^2 = x - 2$ , o eixo de abscisas e recta tanxente á parábola que é paralela á recta  $2y = x - 3$ . Facer un debuxo do recinto descrito.

**Solución:**

A parábola do problema é unha parábola de eixe horizontal, polo que non pode ser a gráfica de ningunha función en  $x$ .

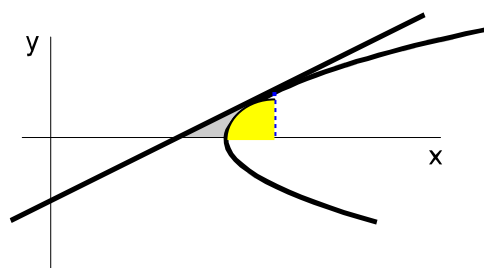
**Método 1:** Un xeito de resolver o problema é despexando o  $y$  na ecuación da parábola para obter unha función que teña por gráfica *parte* da parábola:  $y = \pm \sqrt{\frac{x-2}{2}}$  (se consideramos o signo + temos unha parte, e co signo - a outra).

Buscamos o punto da parábola no que a derivada (pendente da tanxente) coincide coa da recta:

$$2y = x - 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \quad (\text{pendente da recta})$$

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{2}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x-2}{2}}}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{\frac{x-2}{2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 4\left(\frac{x-2}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$



A ecuación da recta tanxente á gráfica dunha función nun punto de coordenadas  $(x_0, f(x_0))$  é  $y - f(x_0) = Df(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

Neste caso queda:  $y - \sqrt{\frac{\frac{5}{2}-2}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{\frac{5}{2}-2}{2}}}\left(x - \frac{5}{2}\right) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

A parábola corta ao eixe X no punto de ordenada 0:  $0 = \sqrt{\frac{x-2}{2}} \Rightarrow x = 2$

Corte da tanxente co eixe X:  $0 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

A área pedida será a área do triángulo menos a área da zona parabólica:

$$\text{Área} = \text{Área do triángulo} - \text{Área da zona parabólica} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right) dx - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{x-2}{2}} dx$$

$$\int \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right) dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x \quad \int \sqrt{\frac{x-2}{2}} dx = 2 \int \frac{1}{2} \left( \frac{x-2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{2}{3} \left( \frac{x-2}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Área} = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right) dx - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{x-2}{2}} dx = \left[ \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{x-2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{12}$$

**Método 2:** Un método máis doado é facer o problema intercambiando os roles das variables e pasar a considerar a  $y$  como a variable independente:

A recta que se dá no enunciado, adquire a forma:

$$2y = x - 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow m = 2 \quad (\text{pendente da recta})$$

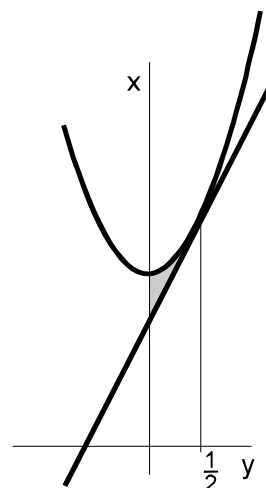
$$2y^2 = x - 2 \Rightarrow x = 2y^2 + 2 \xrightarrow{\text{derivando}} x' = 4y$$

$$x' = 2 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

A recta tanxente será:  $x - \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \right] = 2 \cdot \left( y - \frac{1}{2} \right) \rightarrow x = 2y + \frac{3}{2}$

A área pedida será a área baixo a parábola menos a área baixo a tanxente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 2y^2 + 2 - \left( 2y + \frac{3}{2} \right) \right] dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2y^2 + 2) dy - \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 2y + \frac{3}{2} \right) dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 2y^2 - 2y + \frac{1}{2} \right) dy = \left[ \frac{2y^3}{3} - y^2 + \frac{y}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} \end{aligned}$$



**5** Calcula a área limitada polas gráficas das funcións  $y = x^3 - 2x$  e  $y = 2x$

**Solución:** Calculamos os puntos de corte das dúas gráficas:

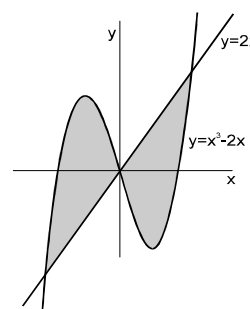
$$x^3 - 2x = 2x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Como temos tres puntos de corte, as gráficas córtanse formando dúas rexións diferentes e debemos calcular as áreas de cada unha por separado.

$$A_1 = \left| \int_{-2}^0 [(x^3 - 2x) - 2x] dx \right| = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| = \left| \left[ \frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| = 4$$

$$A_2 = \left| \int_0^2 [(x^3 - 2x) - 2x] dx \right| = \left| \frac{1}{4} 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \left( \frac{1}{4} 0^4 - 2 \cdot 0^2 \right) \right| = 4$$

Como ves, non é necesario facer a representación gráfica, pero facéndoa tense unha idea máis clara do que hai.



**Nota:** Cando se calcula a área limitada por dúas gráficas non é necesario ter en conta se as funcións toman valores negativos no intervalo.

$y = x^3 - 2x$  e  $y = 2x$  toman valores negativos. Se lles sumamos unha cantidade axeitada, 20 por exemplo, as novas funcións son positivas no intervalo pero a figura que limitan segue sendo a mesma desprazada 20 unidades en vertical e, ademais, cúmprese:

$$A_1 = \left| \int_{-2}^0 [(x^3 - 2x + 20) - (2x + 20)] dx \right| = \left| \int_{-2}^0 [(x^3 - 2x) - (2x)] dx \right|$$

Si é necesario ter en conta se as funcións se cortan nese intervalo, tal como fixemos na resolución do exercicio.

