

Exercicios de autoavaliación

1 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x \cdot \text{sen}(x) dx$ b) $\int x^4 \text{Ln}(x) dx$ c) $\int x^3 e^{x^2} dx$

Solución:

a) Temos un produto.

Un dos factores é x , que se simplifica ao derivalo.

O outro, $\text{sen}(x)$, non se complica ao integralo. Probamos coa integración por partes.

$$\left. \begin{aligned} v = x &\Rightarrow v' = 1 \\ u' = \text{sen}(x) &\Rightarrow u = \int \text{sen}(x) dx = -\text{cox}(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx = -x \cdot \text{cos}(x) - \int 1 \cdot [-\text{cos}(x)] dx = -x \cdot \text{cos}(x) + \text{sen}(x) + C$$

b) Practicamente, sempre que aparece un logaritmo neperiano, utilízase a integración por partes:

$$\int x^4 \text{Ln}(x) dx = \frac{1}{5} x^5 \text{Ln}(x) - \int \frac{1}{5} x^5 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} x^5 \text{Ln}(x) - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \text{Ln}(x) - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} x^5 \right) + C$$

$$\left. \begin{aligned} u' = x^4 &\Rightarrow u = \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \\ v = \text{Ln}(x) &\Rightarrow v' = \frac{1}{x} \end{aligned} \right\}$$

c) Imos utiliza-la integración por partes. Ás veces, a decisión de a que función lle debemos chamar u e a cal v' non é tan doada coma nos casos anteriores:

Eliximos $u' = x \cdot e^{x^2}$ porque recoñecemos a expresión como a derivada de $e^{f(x)}$: $f'(x) \cdot e^{f(x)}$

en particular, para este tipo de función: $\left(e^{x^n} \right)' = nx^{n-1} \cdot e^{x^n}$

$$\left. \begin{aligned} v = x^2 &\Rightarrow v' = 2x \\ u' = x e^{x^2} &\Rightarrow u = \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) - \int (2x) \cdot \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

2 Calcula as seguintes primitivas: a) $\int x^2 e^x dx$ b) $\int \sin^2(x) dx$

Solución:

a) Parece un caso típico de integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^x \Rightarrow u = \int e^x dx = e^x \\ v &= x^2 \Rightarrow v' = 2x \end{aligned} \right\}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = (*)$$

Estamos nunha situación semellante, aínda que algo máis simple: quizais se volvemos aplicar a integración por partes resolvamos:

$$\left. \begin{aligned} u' &= e^x \Rightarrow u = \int e^x dx = e^x \\ v &= x \Rightarrow v' = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$(*) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$

b) Aplicamos a integración por partes:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \sin(x) \Rightarrow u = \int \sin(x) dx = -\cos(x) \\ v &= \sin(x) \Rightarrow v' = \cos(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\int \sin(x) \sin(x) dx = -\cos(x) \sin(x) - \int \cos(x) [-\cos(x)] dx = -\cos(x) \sin(x) + \int \cos^2(x) dx$$

Temos unha nova integral de característica semellantes á inicial: antes era $\int \sin^2(x) dx$ e agora $\int \cos^2(x) dx$. Non se ve que avanzásemos.

É unha situación *recorrente*: intentamos volver á inicial

$$\int \sin^2(x) dx = -\cos(x) \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \quad \begin{matrix} \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\ \downarrow \end{matrix} = -\cos(x) \sin(x) + \int [1 - \sin^2(x)] dx$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\cos(x) \sin(x) + \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx$$

$$[\int \sin^2(x) dx \text{ ó } 1^\circ \text{ membro}] \rightarrow \int \sin^2(x) dx + \int \sin^2(x) dx = -\cos(x) \sin(x) + x$$

$$2 \int \sin^2(x) dx = -\cos(x) \sin(x) + x \rightarrow \int \sin^2(x) dx = \frac{-\cos(x) \sin(x) + x}{2} + C$$

3 Calcula as primitivas de: a) $\int e^{5x+3} dx$ b) $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$

Solución:

a) Facemos o cambio de variable: $\begin{cases} 5x+3 = t \\ 5dx = dt \end{cases}$

$$\int e^{5x+3} dx = \int e^t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x+3} + C$$

b) Agora o cambio non é tan evidente:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(x) = t \\ \cos(x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos(x)} \end{array} \right\}$$

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int t^2 \cdot \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

4 Calcula a primitiva de $\int \frac{3x^2+2}{x^3+x} dx$

Solución:

É unha función racional. Descompoñemos o denominador en factores:

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$, x^2+1 irreducible:

$$\frac{3x^2+2}{x^3+2x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \Rightarrow 3x^2+2 = A(x^2+2x+2) + Bx^2+Cx$$

Igualando os coeficientes, temos:

$$\left. \begin{array}{l} 2A = 2 \\ 2A + C = 0 \\ A + B = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -2 \\ B = 2 \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x^2+2x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x-2}{x^2+2x+2} dx$$

A 1ª parte dá $\ln(x)$, simplemente, e na 2ª vemos a posibilidade de conseguir outro \ln se tivéssemos no numerador a derivada do denominador (que sería $2x+2$). Imos transformar:

$$\int \frac{2x-2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2-2-2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{4}{x^2+2x+2} dx$$

A 1ª parte destas dá, pois $\ln(x^2 + 2x + 2)$.

Intentamos transformar a outra para que nos quede un \arctan (recordamos o de “cadrao dunha suma igual...”):

$$\int \frac{4}{x^2 + 2x + 2} dx = 4 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 1 + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \arctg(x+1) + C$$

Finalmente, reunimos os tres caños: $\ln(x) + \ln(x^2 + 2x + 2) - 4 \arctan(x+1) + C$

5 Calcula a primitiva de: $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

Solución: Trátase dunha función racional, só temos que seguir paso a paso o método:

1º paso: Facer que o grao do numerador sexa menor có do denominador:

Facendo a división: $\frac{x^4 + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = x - 2 + \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

2º paso: Descompoñer o denominador da fracción en factores utilizando Ruffini ou outro método

0	1	2	1	0	(neste caso poderíamos sacar factor común x e decatarnos de que o outro factor é un cadrado perfecto):
	0	0	0	0	
-1	1	2	1	0	O denominador ten por raíces 0 e -1 (-1 é unha raíz con multiplicidade 2)
		-1	-1	0	
-1	1	1	0		
		-1			$x^3 + 2x^2 + x = x \cdot (x^2 + 1)$
-1	1	0			

A descomposición da fracción será:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)x + Cx}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Para calcular os valores de A, B e C igualamos os numeradores e damos valores a x (0, -1 e 1):

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \rightarrow \quad \quad \quad A=1 \\ x=-1 \rightarrow \quad \quad \quad -C=2 \\ x=1 \rightarrow A+2B+C=6 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ C=-2 \\ B=7/2 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+2x^2+x} dx = \int x dx - \int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + \frac{7}{2} \ln|x+1| - 2 \frac{1}{-1} (x+1)^{-1} + C$$