

Exercicios de autoavaliación

1 Atopa a ecuación xeral dos seguintes planos:

a) O que contén ós “eixes” de coordenadas OX e OY.

b) O que pasa polo punto $(0,-2,1)$ e é perpendicular á recta: $(x,y,z) = (5,-1,2) + t(1,2,-1)$

c) O que pasa polo punto $(1,2,3)$ e é perpendicular a recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Resolución:

a) Tendo en conta que un vector característico dese plano é o vector unitario coa dirección do eixe OZ: $\vec{n} = (0,0,1)$, a ecuación do plano será: $[(x,y,z) - (0,0,0)] \cdot (0,0,1) = 0 \rightarrow z = 0$

b) O vector de dirección da recta é un vector característico do plano que se pide, polo tanto:

$$[(x,y,z) - (0,-2,1)] \cdot (1,2,-1) = 0 \rightarrow x + 2y - z + 5 = 0$$

c) As ecuacións xerais dunha recta corresponden a dous planos que, ó cortarensen, determinan esa recta. Polo tanto a recta está contida en cada un dos planos e os vectores característicos deses planos son perpendiculares ó vector de dirección da recta: Eses vectores son vectores de dirección do plano que buscamos:

$$\pi \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \alpha(1,-3,1) + \beta(2,1,-1)$$

Outro xeito de abordar o problema é atopar un vector de dirección da recta que, polo dito antes, é un vector perpendicular ós vectores característicos dos planos. Ese vector pode ser o produto vectorial dos vectores característicos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{v} = (2,3,7)$$

A ecuación do plano será: $[(x,y,z) - (1,2,3)] \cdot (2,3,7) = 0 \rightarrow 2x + 3y + 7z - 29 = 0$

2 Acha a ecuación do plano π que pasa polos puntos $A(2,0,2)$ e $B(1,-1,2)$ e é perpendicular ó plano π' dado pola ecuación $x-y=2z-1=0$.

Solución: Partamos da ecuación normal do plano: $[(x,y,z)-(p_1,p_2,p_3)](n_1,n_2,n_3)=0$. Necesitamos un punto, por exemplo o $A(2,0,2)$ e un vector perpendicular; sérvenos o produto vectorial do vector AB e o vector perpendicular a $x-y-2z-1=0$.

$$(n_1,n_2,n_3) \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \equiv (-2,2,-2)$$

$$\pi \equiv [(x,y,z) - (2,0,2)](-2,2,-2) = 0 \rightarrow -2x + 2y - 2z + 8 = 0$$

3 Acha a ecuación xeral dunha recta paralela ao plano $-2x+2y-2z+8=0$. A continuación determina aquela recta que sendo paralela a ese plano, dista del 6 unidades.

Solución:

Para a recta pedida necesitamos un vector de dirección, calquera vector contido no plano π : $(1,1,0)$, e un punto, calquera que estea a unha distancia de 6 unidades do plano para que a recta tamén o estea (lembra que a distancia dunha recta a un plano paralelo é igual a distancia do plano a calquera dos puntos da recta).

$$d(P,\pi) = \left| \frac{-2p_1 + 2p_2 - 2p_3 + 8}{\sqrt{4+4+4}} \right| = 6 \rightarrow |-2p_1 + 2p_2 - 2p_3 + 8| = 6\sqrt{12}$$

Como podemos coller calquera, facemos $p_3=4$ e $p_2=0$. Entón $|p_1| = 3\sqrt{12} \Rightarrow p_1 = \pm 3\sqrt{12}$

A ecuación da recta será: $(x,y,z) = (3\sqrt{12},0,4) + \lambda(1,1,0) \rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{12} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a-2^a: \\ x - y = 3\sqrt{12} \\ z = 4 \end{matrix}$

$$d(P,\pi) = \left| \frac{-2p_1 + 2p_2 - 2p_3 + 8}{\sqrt{4+4+4}} \right| = 6 \rightarrow |-2p_1 + 2p_2 - 2p_3 + 8| = 6\sqrt{12}$$

Outro xeito sería buscar un plano a distancia 6 de π . A distancia entre dous planos paralelos cando as súas ecuacións son da forma $Ax+By+Cz+D=0$ e $Ax+By+Cz+D'=0$ pódese calcular

coa expresión: $d(\pi,\pi') = \left| \frac{D-D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|$

$$\left| \frac{8-D'}{\sqrt{4+4+4}} \right| = 6 \rightarrow |8-D'| = 6\sqrt{12} \rightarrow \begin{cases} D' = 8 - 6\sqrt{12} \\ D' = 8 + 6\sqrt{12} \end{cases}$$

A ecuación xeral da recta pedida será a intersección dun calquera deses planos con outro plano calquera non paralelo claro:

$$r = \begin{cases} -2x + 2y - 2z + 8 - 6\sqrt{12} = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Fíxate que a solución deste problema dista moito de ser única.

4 Dada a recta r de ecuacións: $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = -z + 3 \end{cases}$

a) Determina a ecuación do plano π que contén a r e dista $\sqrt{3}$ do punto $P(1,2,3)$.

b) Calcula a distancia do punto P a recta r .

Resolución:

a) Ecuación do feixe de planos que contén á recta r : $\begin{cases} x - 3z - 2 = 0 \\ y + z - 3 + t(x - 3z - 2) = 0 \end{cases}$

Comprobemos se o 1º plano do feixe de planos é solución:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{1 - 9 - 2}{\sqrt{1 + 9}} \right| = \frac{10}{\sqrt{10}} \quad \text{Non é solución.}$$

Tomamos agora a segunda expresión, xenérica:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{2 + 3 - 3 + t(1 - 9 - 2)}{\sqrt{t^2 + 1 + (1 - 3t)^2}} \right| = \left| \frac{-10t + 2}{\sqrt{10t^2 - 6t + 2}} \right| = \sqrt{3}$$

$$\frac{-10t + 2}{\sqrt{10t^2 - 6t + 2}} = \pm \sqrt{3} \Rightarrow -10t + 2 = \pm \sqrt{3} \sqrt{10t^2 - 6t + 2} \Rightarrow (-10t + 2)^2 = 3(10t^2 - 6t + 2)$$

$$100t^2 - 40t + 4 = 30t^2 - 18t + 6 \Rightarrow 70t^2 - 22t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 560}}{2 \cdot 70} = \begin{cases} 0'3879 \\ -0'0736 \end{cases}$$

Só queda substituír eses valores na ecuación do feixe de planos.

b) Necesitamos un vector de dirección da recta, $(3, -1, 1)$, e o vector que vai de P a un punto calquera da recta, $\overline{PQ} = (2, 3, 0) - (1, 2, 3) = (1, 1, -3)$. A distancia do punto á recta será:

$$d(P, r) = \frac{|(3, -1, 1) \times (1, 1, -3)|}{|(3, -1, 1)|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2^2 + (-10)^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{24}$$

5 É posible que o produto mixto de tres vectores non nulos sexa 0? En caso afirmativo, dá un exemplo. Razona a resposta.

Solución:

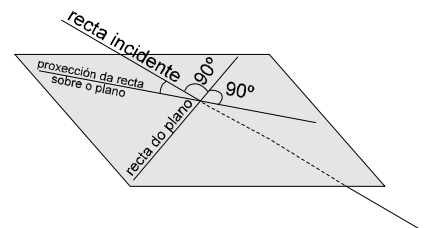
En efecto, basta con que os vectores sexan coplanarios. Exemplo:

$$\vec{v} = (1,2,3), \quad \vec{w} = (4,5,6), \quad \vec{n} = \vec{v} + \vec{w} = (5,7,9)$$

6 Pode ser unha recta perpendicular a outra recta contida nun plano e non ser perpendicular ó plano? Razona a resposta utilizando unha figura.

Solución:

Claramente si, tal como aparece na figura.



7 Temos a recta r dada por un punto e un vector dirección: (P, \vec{u}) e outra recta s dada por (Q, \vec{v}) . Que condición teñen que cumprir para que se crucen?

Solución: Que o produto mixto dos vectores \overrightarrow{PQ} , \vec{u} e \vec{v} sexa non nulo, xa que iso indica que eses tres vectores non son coplanarios, o que só pode suceder cando as rectas non están no mesmo plano, é dicir, cando se cruzan.

8 Calcula a ecuación do plano que pasa por $(4,4,1)$ e é perpendicular á recta
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 4x + z = 8 \end{cases}$$

Solución:

Necesitamos un punto, $(4,4,1)$, e un vector perpendicular ó plano; serve un vector de dirección da recta, polo que pasamos a recta a forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 4x + z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -5 + 3x \\ z = 8 - 4x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -5 + 3t \\ z = 8 - 4t \end{array} \right.$$

$$[(x, y, z) - (4, 4, 1)] \cdot (1, 3, -4) = 0 \Rightarrow x + 3y - 4z - 12 = 0$$

9 Determinar k para que os planos de ecuacións $\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - kz = -4k \end{array} \right\}$ se corten nunha recta e

hacha a ecuación do plano que contén a esa recta e pasa polo punto (2,1,3).

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -k \end{vmatrix} = 2k - 3 - 1 + 3 - k + 2 = k + 1 \quad k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$$

$$rango A: \begin{cases} |2| \neq 0 \Rightarrow rango A \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rango A = 2 \end{cases} \rightarrow rango B: \begin{cases} 2 = rango A \leq rango B \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rango B = 2 \end{cases}$$

$$rango A = rango B \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

Efectivamente, para k=-1, os planos córtanse nunha recta. A súa ecuación ven dada por dous planos diferentes que se corten nesa recta. Podemos coller dous calquera dos do sistema.

10 Determina o plano que contén a recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$ e é paralelo a $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-10}{4}$

Resposta: Necesitamos un punto e un vector perpendicular ou dous vectores de dirección, polo que debemos poñer as ecuacións da recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ll} x + y + z = -5 & 1^a + 2^a: 2x - 2y = -2 \Rightarrow x = -1 + y \\ x - 3y - z = 3 & 1^a - 2^a: 4y + 2z = -8 \Rightarrow z = -4 - 2y \end{array} \\ \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -4 - 2t \end{array} \end{array} \right.$$

$$(x, y, z) = (-1, 0, -4) + \alpha(1, 1, -2) + \beta(2, 3, 4) \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha + 2\beta \\ y = \alpha + 3\beta \\ z = -4 - 2\alpha + 4\beta \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 1^a - 2^a: x - y = -1 - \beta \\ 2^a \bullet 2 + 3^a: 2y + z = -4 + 10\beta \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = -1 - \beta \\ 2y + z = -4 + 10\beta \end{array} \right\} \quad 1^a \bullet 10 + 2^a: 10x - 8y + z = -14$$

11 Dada a recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ e o plano $\pi \equiv 2x - y + 3z + 6 = 0$, pídese:

a) Calcular o ángulo que forman a recta e o plano.

b) Determinar a ecuación continua da recta s , proxección ortogonal de r sobre π .

Resolución:

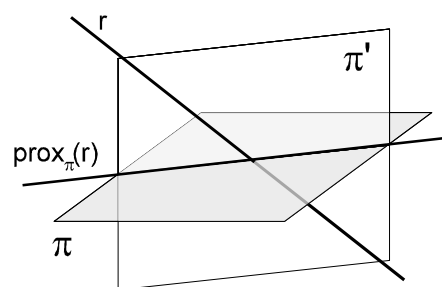
a) Necesitamos un vector de dirección da recta, $(1, 2, -1)$ e un vector normal ao plano, $(2, -1, 6)$

$$\sin(\alpha) = \frac{|(2, -1, 6) \cdot (1, 2, -1)|}{|(2, -1, 6)| \cdot |(1, 2, -1)|} = \frac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) = 19'1066''$$

b) Para proxección ortogonal de r sobre π , podemos empregar a ecuación xeral pois xa coñecemos un dos planos, o propio π . O outro será un plano perpendicular a π e contendo a recta r . A ecuación dese plano será (un punto é o punto da recta, e vectores de dirección son o vector de dirección da recta e o normal ao plano):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x - 5y - 5z - 5 = 0$$

$$\text{A recta será: } r = \begin{cases} 5x - 5y - 5z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z + 6 = 0 \end{cases}$$



12 Calcula o volume do tetraedro de vértices o punto $P=(1,1,1)$ e os puntos nos que o plano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 12 = 0$ corta os eixes de coordenadas.

Solución:

Empezamos calculando os puntos intersección do plano coa eixes:

- Co eixe X:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 12 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (6,0,0)$$

- Co eixe Y:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 12 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (0,4,0)$$

- Co eixe Z:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 12 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (0,0,12)$$

Calculamos os vectores de P a cada un deses puntos. O volume será o produto mixto deses

vectores:
$$[(5,-1,-1), (-1,3,-1), (-1,-1,11)] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 144$$

13 Calcular a área do triángulo que ten por vértices a intersección do plano

$\pi \equiv 2x + y + 3z = 6$ cos eixes de coordenadas.

Solución:

Empezamos calculando os puntos intersección do plano coa eixes:

- Co eixe X:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (3,0,0)$$

- Co eixe Y:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 6 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (0,6,0)$$

- Co eixe Z:
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 6 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (0,0,2)$$

A área do triángulo será a metade do módulo do produto vectorial dos vectores que van dun deses puntos aos outros:

$$\text{Área} = \frac{|(3,0,-2) \times (0,6,-2)|}{2} = \frac{|(-12,6,18)|}{2} = \frac{\sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 18^2}}{2} = 3\sqrt{14}$$