

Exercicios de autoavaliación

1 Dados os vectores $(2,2,-1)$ e $(-1,1,0)$, pídese:

- Comprobar que son ortogonais.
- Atopar outros dous vectores coa mesma dirección ca eses e módulo 1.
- Atopar outro vector que forme cos anteriores unha base ortonormal de V^3 .

Resolución:

Dous vectores son ortogonais se, e só se, o seu produto escalar é 0:

a) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow (2,2,-1) \cdot (-1,1,0) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$ Son ortogonais.

b) Para obter un vector coa mesma dirección ca outro e con módulo 1 só temos que multiplicar o vector polo inverso do módulo:

$$|(2,2,-1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ten módulo 1}$$

$$|(-1,1,0)| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ ten módulo 1}$$

c) Un vector que forme cos anteriores unha base ortonormal ten que ser perpendicular a eles e ter módulo 1.

Lembra que o produto vectorial de dous vectores é outro vector perpendicular a eles:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \wedge \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Ese vector xa ten módulo 1 porque o módulo do produto vectorial de dous vectores é o produto dos módulos (neste caso 1 e 1) polo seno do ángulo que forman (e $\sin(90^\circ)=1$).

Comprobémolo:

$$\left|\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{16}{18}} = 1$$

2 Atopa a ecuación xeral do plano que:

a) Contén os “eixes” de coordenadas OX e OY.

b) Pasa polo punto $(0,-2,1)$ e é perpendicular á recta:

$$(x, y, z) = (5, -1, 2) + t(1, 2, -1)$$

c) Pasa polo punto $(1, 2, 3)$ e é perpendicular á recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Resolución:

a) Tendo en conta que un vector característico dese plano é o vector unitario coa dirección do eixe OZ: $\vec{n} = (0, 0, 1)$, a ecuación do plano será: $[(x, y, z) - (0, 0, 0)] \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow z = 0$

b) O vector de dirección da recta é un vector característico do plano que se pide, polo tanto:

$$[(x, y, z) - (0, -2, 1)] \cdot (1, 2, -1) = 0 \rightarrow x + 2y - z + 5 = 0$$

c) As ecuacións xerais dunha recta corresponden a dous planos que, ó cortarse, determinan esa recta. Polo tanto a recta está contida en cada un dos planos e os vectores característicos deses planos son perpendiculares ó vector de dirección da recta: Eses vectores son vectores de dirección do plano que buscamos:

$$\pi \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(1, -3, 1) + \beta(2, 1, -1) \rightarrow 2x + 3y + 7z - 29 = 0$$

3 Atopa a ecuación das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos $(1, 4, -1)$ e $(2, -1, 0)$.

b) Recta perpendicular ó plano $3x - y + 2z - 4 = 0$ pasando polo punto $(0, 1, 5)$.

c) Recta pasando polo punto $(3, 2, 1)$ e paralela á recta: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$

Resolución:

Partiremos da ecuación vectorial da recta, $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$, ou da ecuación continua, $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$, necesitamos un punto da recta e un vector de dirección.

a) $\vec{v} = (1, 4, -1) - (2, -1, 0) = (-1, 5, -1) \rightarrow r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(-1, 5, -1)$ Ecuación vectorial.

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= -1 + 5t \\ z &= -t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 5x + y &= 9 \\ x - z &= 2 \end{aligned} \quad \text{Ecuacións xerais} \quad \frac{x - 0}{1} = \frac{y - 9}{-5} = \frac{z + 2}{1} \quad \text{Ecuación continua.}$$

b) O vector característico do plano é un vector de dirección da recta. Polo tanto:

$$r \equiv (x, y, z) = (0, 1, 5) + t(3, -1, 2) \text{ Ecuación vectorial.} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2} \text{ Ecuación continua.}$$

c) O vector de dirección da recta que buscamos ten que ser perpendicular ós vectores característicos dos planos que aparecen na ecuación xeral de r . Polo tanto, podemos usar, como vector de dirección, o produto vectorial deses vectores característicos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{v} = (2, 1, 6)$$

A ecuación continua da recta será: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{6}$

4 Dada a recta r de ecuación $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ e o punto $P=(3, -7, -2)$, determina a ecuación do plano que contén a recta e está a distancia 3 do punto.

Resolución:

i) Análise do problema:

A distancia dun punto a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ vén dada pola fórmula:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Como o plano ten que conter a recta, collendo dous puntos da recta e tendo en conta a fórmula anterior poderíamos propor un sistema de 3 ecuacións e 4 incógnitas que ten por solucións as ecuacións do plano que estamos buscando (só poderíamos despegar tres incógnitas en función da outra -cada plano ten infinitas ecuacións, que só se diferencian no produto por un número-):

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 2, 3) \\ Q = (1, 2, 3) + (1, 1, 4) = (2, 3, 7) \\ d(P, \pi) = \frac{|3A - 7B - 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 = -D \\ A \cdot 2 + B \cdot 3 + C \cdot 7 = -D \\ |3A - 7B - 2C + D| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{array} \right\}$$

Desafortunadamente, resolver ese sistema non semella cousa fácil, e máis tendo un valor absoluto na última ecuación o que nos obrigaría a desdoblalo en dous (hai dous planos nas condicións do problema).

ii) Un xeito máis doado é utilizar a ecuación do feixe de planos que determina a recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Feixe de planos} \equiv \begin{cases} 4x - z - 1 = 0 \\ 4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

O plano buscado ou é o $4x - z - 1 = 0$ ou é da forma $4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0$ e temos que resolver unha ecuación cunha soa incógnita: λ

$$d((3, -7, -2), (4x - z - 1 = 0)) = \frac{|12 + 2 - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{17}} \neq 3 \quad (4x - z - 1 = 0 \text{ non é este plano})$$

$$4x - z - 1 + \lambda(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow (4 + \lambda)x - \lambda y - z + (\lambda - 1) = 0$$

$$d((3, -7, -2), ((4 + \lambda)x - \lambda y - z + (\lambda - 1) = 0)) = \frac{|12 + 3\lambda + 7\lambda + 2 + \lambda - 1|}{\sqrt{(4 + \lambda)^2 + \lambda^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$|11\lambda + 13| = 3 \cdot \sqrt{2\lambda^2 + 8\lambda + 17} \xrightarrow{\text{elevando ó cadrado}} 121\lambda^2 + 286\lambda + 169 = 9 \cdot (2\lambda^2 + 8\lambda + 17)$$

$$103\lambda^2 + 214\lambda + 16 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-214 \pm \sqrt{214^2 - 4 \cdot 103 \cdot 16}}{2 \cdot 103} = \frac{-214 \pm 198}{206} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-16}{206} \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Os planos pedidos son:

$$\lambda = -2 \rightarrow \pi \equiv 4x - z - 1 + (-2)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z - 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-8}{103} \rightarrow \pi \equiv 4x - z - 1 + \left(\frac{-8}{103}\right)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv \frac{404}{103}x + \frac{8}{103}y - z - \frac{111}{103} = 0$$

5 Os puntos $P = (1, 1, 0)$ e $Q = (0, 2, 1)$ son dous vértices contiguos dun rectángulo. Un terceiro

vértice está sobre a recta de ecuacións $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Determina os vértices dun rectángulo que verifique as condicións anteriores.

Resposta:

Como en todos os problemas de búsqueda de puntos, podemos buscar directamente o punto mediante a resolución de ecuacións que deba verificar ou intentar definilo como intersección de rectas ou planos.

Buscamos un punto X da recta r - polo tanto, da forma $(x, 0, 1)$ - de maneira que os vectores \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PQ} sexan perpendiculares (outra posibilidade é que o sexan os vectores \overrightarrow{QX} e \overrightarrow{QP}). Esas condicións dan lugar as ecuacións.

a. \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PQ} perpendiculares:

$$(x-1, 0-1, 1-0) \cdot (0-1, 2-1, 1-0) = 0 \Rightarrow -x+1-1+1=0 \Rightarrow x=1$$

b. \overrightarrow{QX} e \overrightarrow{QP} perpendiculares:

$$(x-0, 0-2, 1-1) \cdot (1-0, 1-2, 0-0) = 0 \Rightarrow x-2+0=0 \Rightarrow x=2$$

Outro xeito de resolver o problema sería buscar o punto de corte da recta r co plano que pasa por P (ou por Q) e ten vector característico o vector \overrightarrow{PQ} .

6 Atopa o punto simétrico de P(2,-3,5) en relación á recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = -7 \\ x + 2y - z = -6 \end{cases}$

Resposta:

Podemos empregar diversos métodos. Un sería atopar o punto Q da recta r máis próximo a P e logo o simétrico.

Q será a intersección de r co plano que pasa por P e é perpendicular á recta r . Atopamos a ecuación paramétrica da recta r resolvendo o sistema:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -6 \end{array} \xrightarrow{z=t} \begin{array}{l} 2x + y = 3-t \\ x + 2y = -6+t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1^a - 2^a: x = 4-t \\ 2 \cdot 2^a - 1^a: y = -5+t \\ z = t \end{cases}$$

A ecuación do plano que pasa por P e perpendicular á recta será:

$$[(x, y, z) - (2, -3, 5)] \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Rightarrow -x + y + z = 0$$

$$\text{O punto Q será: } -(4-t) + (-5+t) + t = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

O punto simétrico X debe verificar: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QX} \Rightarrow (-1, 1, -2) = (x, y, z) - (1, -2, 3)$

O punto buscado será: $(x, y, z) = (-1, 1, -2) + (1, -2, 3) = (0, -1, 1)$

7 Dado o punto P(2,0,-1) e o plano $\alpha \equiv 3x + y - z - 1 = 0$. Calcula o punto Q, simétrico a P, respecto ó plano α .

Solución:

- i) Un xeito de calcular ese punto é calcular o punto do plano máis próximo a P (intersección da recta que pasa por P e é perpendicular ao propio plano) e logo obter o simétrico (ver o problema anterior).
- ii) Outro xeito sería calcular a distancia do punto ao plano e sumarlle ao punto un vector perpendicular ao plano co dobre desa lonxitude que obteremos a partir dun vector unitario perpendicular ao plano $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$:

$$\bullet \quad d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 0 - (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{11}}$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = (2, 0, -1) + \frac{12}{\sqrt{11}} \frac{(3, 1, -1)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{58}{11}, \frac{12}{11}, -\frac{23}{11} \right).$$

Como non coñecemos a onde apunta o vector, é posible que a solución sexa:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = (2, 0, -1) + \frac{12}{\sqrt{11}} \frac{(-3, -1, 1)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{-14}{11}, \frac{-12}{11}, \frac{1}{11} \right)$$

8 Calcula o ángulo que forman a recta $r \equiv (x, y, z) = (2, -1, -3) + \alpha(1, 6, 0)$ e o plano pasando polo punto P(-2, 6, 1) e con vector característico (vector normal asociado) $\vec{v} = (1, 1, 3)$.

Solución:

$$\cos(\hat{A}) = \left| \frac{(1, 6, 0) \cdot (1, 1, 3)}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 0} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} \right| = \frac{1 + 6}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{11}} = 0'346977 \Rightarrow \hat{A} = \cos^{-1}(0'346977) = 69'6975$$

9 Determinar o plano paralelo a $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-10}{4}$ e contendo a $r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$

Solución:

Se partimos da ecuación vectorial do plano, necesitaremos un punto e dous vectores de dirección.

Empezamos por poñer a recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^a - 2^a: & -4y = -8 \Rightarrow y = 2 \\ 1^a - 3 + 2^a: & 4x + 2z = -12 \Rightarrow z = -6 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -6 - 2t \end{cases}$$

Ecuación do plano: $(x,y,z)=(0,2,-6)+\alpha(1,0,-2)+\beta(2,3,4)$.

A ecuación xeral será:

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2 + 3\beta \\ z = -6 - 2\alpha + 4\beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \cdot 2 + 3^a: 2x + z = -6 + 8\beta \\ 2^a: y = 2 + 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{y-2}{3} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2 + 3\beta \\ z = -6 - 2\alpha + 4\beta \end{array}} \right\} 2x + z = -6 + 8 \frac{y-2}{3} \Rightarrow 6x - 8y + 3z = -34$$

10 Calcula o ángulo que forman as rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$ e $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

Solución:

$$\cos(\hat{A}) = \left| \frac{(2,1,1) \cdot (1,-3,1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}} \right| = \left| \frac{2-3+1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} \right| = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$