

Exercicios de Autoavaliación

1 Atopa a ecuación xeral dos seguintes planos:

- Plano que pasa polo puntos $(2,-1,0)$, $(1,1,5)$ e $(3,0,4)$.
- Plano que pasa polo punto $(1,-5,2)$ e é paralelo ó plano $2x+3y+z+5=0$
- Plano que pasa pola orixe de coordenadas e contén á recta $(x,y,z)=(1,1,2)+t(-3,1,4)$.

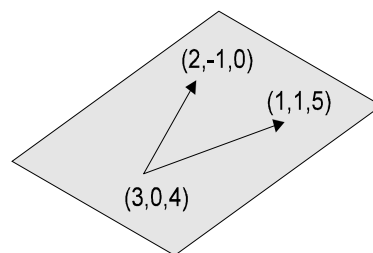
Resolución: Dependendo dos datos será máis doado partir dunha ecuación ou doutra. Nós partiremos sempre da ecuación vectorial ou da normal.

a) Ecuación vectorial do plano: $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + \alpha \cdot (v_1,v_2,v_3) + \beta \cdot (w_1,w_2,w_3)$

Necesitamos un punto do plano (pode ser calquera dos tres) e dous vectores de dirección (os que van dun punto ós outros dous):

$$\vec{v} = (2,-1,0) - (3,0,4) = (-1,-1,-4) \quad \vec{w} = (1,1,5) - (3,0,4) = (-2,1,1)$$

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (3,0,4) + \alpha \cdot (-1,-1,-4) + \beta \cdot (-2,1,1) \\ \left. \begin{aligned} x &= 3 - \alpha - 2\beta \\ y &= -\alpha + \beta \\ z &= 4 - 4\alpha + \beta \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} 1^a + 2 \cdot 2^a &\rightarrow x + 2y = 3 - 3\alpha \\ 3^a - 2^a &\rightarrow z - y = 4 - 3\alpha \end{aligned} \right\} & x + 3y - z = -1 \end{aligned}$$



b) Dous planos paralelos teñen ecuacións que con coeficientes proporcionais (en especial iguais) agás no valor da D:

$$2x + 3y + z + D = 0$$

Como debe pasar polo punto $P(1,-5,2)$:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 11$$

A ecuación será: $2x + 3y + z - 11 = 0$

c) Ecuación vectorial do plano: $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + \alpha \cdot (v_1,v_2,v_3) + \beta \cdot (w_1,w_2,w_3)$

Necesitamos dous vectores de dirección: Un pode ser o vector de dirección da recta e o outro o vector que vai da orixe a un punto calquera da recta .

$$\vec{v} = (-3,1,4)$$

$$\vec{w} = (1,1,2) - (0,0,0) = (1,1,2)$$

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (0,0,0) + \alpha \cdot (-3,1,4) + \beta \cdot (1,1,2) \\ \left. \begin{aligned} x &= -3\alpha + \beta \\ y &= \alpha + \beta \\ z &= 4\alpha + 2\beta \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} 1^a - 2^a &\rightarrow x - y = -4\alpha \\ 3^a - 2 \cdot 2^a &\rightarrow z - 2y = 2\alpha \end{aligned} \right\} & x - 5y + 2z = 0 \end{aligned}$$

2 Atopa a ecuación xeral dos seguintes planos:

- Plano que contén ós "eixes" de coordenadas OX e OY.

b) Plano que pasa polo punto $(0, -2, 1)$ e é perpendicular á recta: $(x, y, z) = (5, -1, 2) + t(1, 2, -1)$

Resolución: a) As ecuacións dos eixes OX e OY son:

$$OX \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$$OY \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + t'(0, 1, 0)$$

O plano que buscamos é o que pasa pola orixe e ten por vectores de dirección ós vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$.

b) O vector de dirección da recta é un vector característico do plano que se pide, polo tanto:

$$[(x, y, z) - (0, -2, 1)] \cdot (1, 2, -1) = 0 \rightarrow x + 2y - z + 5 = 0$$

3 Atopa a ecuación das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos $(1, 4, -1)$ e $(2, -1, 0)$.

b) Recta pasando polo punto $(3, 2, 1)$ e paralela á recta: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$

Resolución: Partiremos da ecuación vectorial da recta, $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$, ou da ecuación continua, $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$, polo que debemos atopar un punto da recta e un vector de dirección.

a) $\vec{v} = (1, 4, -1) - (2, -1, 0) = (-1, 5, -1) \rightarrow r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(-1, 5, -1)$ Ecuación vectorial.

$$\left. \begin{matrix} x = 2 - t \\ y = -1 + 5t \\ z = -t \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} 5x + y = 9 \\ x - z = 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{Ecuacións xerais} \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-1} \quad \text{Ecuación continua.}$$

b) O vector característico do plano será un vector de dirección da recta perpendicular a el. Polo tanto:

$$r \equiv (x, y, z) = (0, 1, 5) + t(3, -1, 2) \quad \text{Ecuación vectorial.} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2} \quad \text{Ecuación continua.}$$

4 Estudar para que valores do parámetro k , o seguinte sistema ten máis dunha solución e, nese caso, dar unha interpretación xeométrica das solucións:

$$\left. \begin{matrix} x - ky + kz = k \\ -x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = k \end{matrix} \right\}$$

Resolución: Dado que é un sistema 3×3 , para que teña máis dunha solución é necesario que o determinante de A sexa 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - k - k - k^2 - k^2 - 1 = -k^2 - 2k - 1$$

$$-k^2 - 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = -1$$

Comprobamos que efectivamente ten máis dunha solución (tamén pode ser incompatible) estudando os rangos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{O seu rango é 1 porque só ten unha fila independente (a 3ª é igual á 1ª e a 2ª é igual á 1ª multiplicada por -1).}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{O rango de M tamén é 1 polas mesmas razóns.}$$

O sistema é compatible indeterminado e o grao de indeterminación é 2. A solución do sistema corresponde á intersección de *tres planos coincidentes*: as tres ecuacións son equivalentes, logo representan o mesmo "obxecto".

5 Estudar a posición relativa dos seguintes planos en función do parámetro k:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv kx + 2y + 3z = 1 \\ \pi_2 &\equiv x + (k+1)y + 3z = k \\ \pi_3 &\equiv (k+1)x + 3(k+1)y + 9z = 2 \end{aligned}$$

Resolución: Estudamos cal é a intersección dos planos segundo os valores de k:

$$\begin{cases} kx + 2y + 3z = 1 \\ x + (k+1)y + 3z = k \\ (k+1)x + 3(k+1)y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k+1 & 3 \\ k+1 & 3k+3 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k+1 & 3 & k \\ k+1 & 3k+3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & k+1 & 3 \\ k+1 & 3k+3 & 9 \end{vmatrix} = -3k^2 + 9k - 6$$

$$-3k^2 + 9k - 6 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Caso I: $k \neq 2$ e $k \neq 1$. Sistema compatible determinado, os planos córtanse nun único punto.

Caso II: $k=2$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 9y + 9z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 9 - 9 - 36 - 4 = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 3$$

O sistema é incompatible, os tres planos non teñen ningún punto en común.

Fixándonos na matriz do sistema vemos que a 2ª e a 3ª filas son proporcionais, agás os termos independentes (os vectores característicos dos planos 2º e 3º teñen a mesma dirección), polo tanto eses

dous planos son paralelos (o outro plano si se cortaríase con eles, pero os tres non coinciden en ningún punto).

Caso III: $k=1$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+6y+9z=2 \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+6y+9z=2 \end{array} \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ten dúas filas iguais)} \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

O sistema é compatible indeterminado. É evidente que a 2ª ecuación é igual á 1ª, pero tiñamos que estudar os rangos para sabermos se o sistema é compatible ou non.

A solución é a recta intersección do 1º plano (ou o 2º pois son o mesmo) e o 3º.

6 Estudar a posición relativa das seguintes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x-y+z=-2 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} -x+y-2z=3 \\ 2x+3y-2z=1 \end{cases}$$

Resolución: Coas rectas en forma xeral, o xeito máis doado é estudar o rango das matrices A e M. Farémolo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2^a-1^a \cdot 2 \\ 3^a+1^a \\ 4^a-1^a \cdot 2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a \cdot 7+2^a \cdot 4 \\ 4^a \cdot 7-2^a \cdot 3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a+3^a} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vemos que rango de A é 3 e o rango de M é 4, polo tanto non hai solución, non teñen puntos en común: *as rectas crúzanse*.

7 Estudar a posición relativa das rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ 3x+2y-z=2 \end{cases}$ e $s \equiv \frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-2}{-2}$

Resolución: A posición relativa de dúas rectas podemos estudala a partir do rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad (p_1, p_2, p_3) \text{ e } (q_1, q_2, q_3) \text{ son un punto de cada recta.}$$

$(v_1, v_2, v_3) \text{ e } (w_1, w_2, w_3) \text{ son vectores de dirección das rectas.}$

- **Rango(A)=1**, as rectas son coincidentes.

- **Rango (A)=2**, as rectas córtanse (os vectores de dirección son independentes) ou son paralelas (un dos vectores de dirección é igual ó outro multiplicado por un número).
- **Rango(A)=3**, as rectas crúzanse.

Empezamos por atopar un punto e un vector de dirección de r resolvendo o sistema e obtendo as ecuacións paramétricas da recta:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + 2t \\ 3x + 2y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto da recta é (0,1,0) e (3,-4,1) é un vector de dirección.

Na recta s xa son explícitos: (1, -1, 2) e (-6, 8, -2), respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \end{cases}$$

Polo tanto, as rectas córtanse nun punto.

8 ¿Para que valores de α son liñalmente dependentes os vectores $\vec{u} = (\alpha, \alpha - 1)$ e $\vec{v} = (2 + 3\alpha, \alpha - 4)$?

Solución:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ 2 + 3\alpha & \alpha - 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 3\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 16}}{-4} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{9 + \sqrt{97}}{-4} \\ \alpha_2 = \frac{9 - \sqrt{97}}{-4} \end{cases}$$

9 Estudia, en función do parámetro k , cal é a posición relativa dos planos: $\left. \begin{aligned} 2x + ky &= 0 \\ x + kz &= k \\ x + y + 3z &= 5 \end{aligned} \right\}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = k^2 - 3k - 2k = k^2 - 5k$$

$$k^2 - 5k = 0 \rightarrow k(k - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

Caso I: k distinto de 0 e de 5, o sistema é compatible determinado (solución única). Os planos córtanse nun punto.

Caso II: $k=0$, temos que estudia-los rangos das matrices:

$$\text{rango A: } \begin{cases} |2| \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} = 2 \end{cases} \quad \text{rango B: } \begin{cases} 2 = \text{rango A} \leq \text{rango B} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango B} = 2 \end{cases}$$

$\text{rango A} = \text{rango B} \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Os planos córtanse nunha recta, a solución depende de 1 parámetro:

dimensión solución = núm. de incógnitas - rango das matrices

Fíxate que o 2º plano é igual ó 1º.

Caso III: $5=0$.

$$\text{rango A: } \begin{cases} |2| \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} = 2 \end{cases} \quad \text{rango B: } \begin{cases} 2 = \text{rango A} \leq \text{rango B} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 25 - 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rango B} = 3 \end{cases}$$

$\text{rango A} \neq \text{rango B} \Rightarrow$ sistema incompatible

Os tres planos non se cortan en ningún punto, pero si se cortan dous a dous (fíxate que os vectores normais dos planos teñen todos diferentes direccións).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 + 1 - k - 1 - k = k^2 - 2k + 1 \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

10 Discute e resolve e interpreta xeometricamente, segundo os valores de a , o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Solución:

Estudamos que valores anulan o determinante da matriz do sistema

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2a^3 - 3a + 2 = 0 \xrightarrow{\text{Ruffini}} (x+2)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Caso I: a distinto de -2 e de 1 , o sistema é compatible determinado (solución única), o sistema corresponde a tres planos que se cortan en un único punto.

Caso II: $a = -2$, temos que estudar os rangos das matrices:

$$\text{rango A: } \begin{cases} |-2| \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango A} = 2 \end{cases} \quad \text{rango B: } \begin{cases} 2 = \text{rango A} \leq \text{rango B} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rango B} = 3 \end{cases}$$

$\text{rango A} \neq \text{rango B} \Rightarrow \text{sistema incompatible}$

Dado que, coladas dúas a dúas as ecuacións, os coeficientes das incógnitas non son proporcionais, o sistema corresponde a tres planos que non se cortan e non son paralelos (dous a dous determinan rectas, pero esas rectas si son paralelas).

Caso III: $a=1$.

$$\text{rango A: } \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango A} = 1 \rightarrow \text{rango B: } \begin{cases} 1 = \text{rango A} \leq \text{rango B} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango B} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado, corresponde a tres planos coincidentes.

11 Dados os sistemas de ecuacións:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{array} \right\} \text{ e } \left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 6 \end{array} \right\}$$

- Resólveos e escribe as solucións en forma paramétrica.
- Hai algunha relación entre as solucións dos dous sistemas? Xustifica a resposta.

Solución:

Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Sabemos que ten solución (é homoxéneo), pero é indeterminado e debemos estudar o rango para obter a solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |1| \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de A}) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de A}) = 2 \end{cases}$$

Podemos despxear dúas incógnitas en función da outra (x e y en función de z):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3t \\ 3x + 2y = -t \\ z = t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 3t \\ 3x + 2y = -t \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{reducción: } 1^a \cdot 3 - 1^a} y = 10t$$

$$x = 3t - 10t \rightarrow x = -7t$$

As solucións do sistema todos os puntos da forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = -7t \\ y = 10t \\ z = t \end{array} \right\}$$

Observa que se trata da ecuación paramétrica dunha recta no espazo, unha recta que pasa pola orixe de coordenadas e con vector de dirección $(-7,10,1)$.

Resolvamos o segundo sistema. Xa sabemos que $\det(A)=0$, comprobemos o rango da ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Os rangos son iguais, o sistema é compatible.}$$

Podemos despxar dúas incógnitas en función da outra (x e y en función de z):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 + 3t \\ 3x + 2y = 10 - t \\ z = t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 4 + 3t \\ 3x + 2y = 10 - t \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{reducción: } 1^a \cdot 3 - 1^a} y = 30 + 10t$$

$$x = 4 + 3t - (30 + 10t) \rightarrow x = -26 - 7t$$

As solucións do sistema todos os puntos da forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = -26 - 7t \\ y = 30 + 10t \\ z = t \end{array} \right\}$$

Novamente obtemos a ecuación paramétrica dunha recta no espazo, neste caso unha recta que pasa pola polo punto $(-26,30,0)$ e con vector de dirección $(-7,10,1)$. É unha recta paralela a que corresponde ás solucións do sistema homoxéneo.

As solucións dun sistema de ecuacións lineais con tres incógnitas son sempre elementos do espazo:

- Un punto se ten solución única.
- Unha recta se o seu grao de indeterminación é 1 (n° incógnitas – rangos = 1 é dicir, neste caso, que os rangos sexan 2).
- Un plano se o grao de indeterminación é 2 (n° incógnitas – rangos = 2, rangos 1).

Se o sistema fose de dúas ecuacións, as solucións son elementos do plano (dúas dimensións):

- Un punto se ten solución única.
- Unha recta se o seu grao de indeterminación é 1 (n° incógnitas – rangos = 1 é dicir, neste caso, que os rangos sexan 1).