

Solucións aos exercicios de autoavaliación

1. Dúas matrices A e B conmutan se $A \cdot B = B \cdot A$. Obter as matrices triangulares

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ que conmutan coa matriz } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolución:

$$a) \quad A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Facendo os produtos e igualando as compoñentes queda:

$$\begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+3d \\ -a & -b+2c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = a \\ 3a+2b = b+3d \\ -c = -a \\ 2c = -b+2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = d \\ a = c \end{cases}$$

2. É certa a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sendo A e B matrices?

Resolución: $(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot (A-B) + B \cdot (A-B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2$.

Para que fose certa tería que coincidir AB con BA , cousa que soamente estaría garantida no caso de ser conmutativo o produto e, como sabemos, nas matrices en xeral non o é.

3. É certa a igualdade $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ sendo A e B matrices?

Resolución: $(A+B) \cdot (A+B) = A \cdot (A+B) + B \cdot (A+B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$.

Para que a “suma por diferenza” fose “diferenza de cadrados” tería que anularse $-AB+BA$, cousa que soamente pode facerse no caso de ser conmutativo o produto e, como sabemos, nas matrices en xeral non o é.

A expresión “suma por diferenza igual a diferenza de cadrados”, nas matrices, en xeral é falsa.

4. (selectividade) Demostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α e β (I denota a matriz identidade). Utilice este feito para calcular a inversa de A .

Resolución: formulamos a ecuación e calculamos, se é posible, α e β .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{fíxate que o } 0 \text{ que aparece na ecuación, ten que ser a matriz } 0 \text{ e non o número } 0).$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sumando e igualando por componentes}} \begin{cases} 5 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 4 + \alpha = 0 \\ 4 + \alpha = 0 \\ 5 + 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Por tanto, a matriz si verifica esa ecuación. Só queda empregar ese feito para atopar a inversa.

Lembremos que a inversa debe verificar que, multiplicada por A , debe dar a matriz identidade I . Observando a ecuación semella que podemos establecer esa relación cos termos que aparecen nela:

$$A^2 + \alpha A + \beta I = 0 \rightarrow A^2 + \alpha A = 0 - \beta I \xrightarrow{\text{sacando } A \text{ factor común}} A \cdot (A + \alpha I) = -\beta I \xrightarrow{\text{dividindo por } -\beta} A \cdot \left(\frac{A + \alpha I}{-\beta} \right) = I$$

A matriz $\frac{A + \alpha I}{-\beta}$ ten que ser a inversa de A pois ao multiplicalas da a identidade.

$$\frac{A + \alpha I}{-\beta} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-3} & \frac{-1}{-3} \\ \frac{-1}{-3} & \frac{2}{-3} \end{pmatrix}$$

5. (selectividade) Considera dúas matrices A e B que verifican $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ e que

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Calcula a matriz } A^2 - B^2.$$

Resolución: poderíamos estar tentados de simplemente multiplicar as matrices que aparecen no enunciado pois é sabido que, con números, $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$. Porén, xa comprobamos no exercicio terceiro que, en xeral, non vai selo con matrices.

Debemos resolver o problema doutro xeito, calculando A e B por exemplo:

$$\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando as ecuacións}} 2A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{despexando}]{\text{substituíndo } e} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 31/2 & 13/2 \\ 11/2 & 19/2 \end{pmatrix}$

6. (selectividade) Determina A^4 sabendo que $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$, sendo

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución: poderíamos calcular A e logo multiplicala por si mesmo catro veces, pero intentemos antes desenvolver ese produto por se podemos simplificalo un pouco:

$$A^4 = (P^{-1} \cdot D \cdot P)^4 = (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P)$$

Como o produto de matrices é asociativo, podemos ir agrupando eses factores de dous en dous como nos resulte máis doado (sen cambiar a orde):

$$A^4 = P^{-1} \cdot D \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot D \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot D \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot D \cdot P \stackrel{P^{-1} \cdot P = I}{\downarrow} = P^{-1} \cdot D^4 \cdot P$$

Empecemos pois calculando D^4 :

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D^4 = D^2 \cdot D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En realidade non era necesario facer o segundo produto, basta decatarse de que ao ser diagonal a matriz, só hai que elevar á cuarta os elementos da diagonal.

Calculemos a inversa de P (en próximas unidades veremos un procedemento para facelo de xeito máis doado, pero é importante que entendas que sempre poderás transformar unha ecuación matricial nun sistema numérico desenvolvendo as expresións e igualando compoñente a compoñente):

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{igualando}]{\text{multiplicando e}} \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z &= 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}w &= 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w &= 1 \end{aligned} \right\}$$

É un sistema de catro ecuacións e catro incógnitas pero pode separarse en dous sistemas de dúas ecuacións e dúas incógnitas cada un:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{multiplicando a 2ª por } -\sqrt{3} \text{ e sumando as ecuacións}} -2z = 1 \rightarrow z = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{substituíndo na 2ª}} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}w = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{multiplicando a 2ª por } -\sqrt{3} \text{ e sumando as ecuacións}} -2w = -\sqrt{3} \rightarrow w = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{substituíndo na 2ª}} \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

O produto pedido será:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{16}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} & -\frac{15\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{15\sqrt{3}}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$$

7. (selectividade) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Razona se pode existir unha matriz B tal que $A \cdot B = I$, sendo I a matriz identidade; en caso afirmativo, calcula B. Ten inversa A? Razona as túas respostas.

Resolución: A é unha matriz 2x3, podemos pensar en multiplicar por unha matriz 3x2 para obter a matriz identidade 2x2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

non importando cales podan ser os valores de e e f.
A matriz A non ten inversa, xa que non é cadrada.

- 8) No instituto organizáronse catro grupos de 30 alumnos cada un para a realización de actividades extraescolares. Tense observado que un 80% dos que asisten un día á súa actividade, asisten tamén ao día seguinte, mentres que soamente un 40% dos que faltaron un día asisten o día seguinte. Ao comezar o trimestre no grupo A asisten 25 alumnos, 30 no B, 0 no C, e 20 no D.

- Escribe, para cada grupo, a expresión para calcular os alumnos que asisten e os que non asisten ao segundo día, empregando a linguaxe matricial.
- Calcula os asistentes e non asistentes en cada grupo o terceiro día.
- Cantos asistirán e cantos non, previsiblemente, a cada actividade o quinto día?
- Cal será o número de asistentes en cada grupo a medida que vaia avanzando a actividade? Busca un método xeral para calculalo.

Resolución: comezamos por realizar uns cálculos concretos, organizándoos nunha táboa:

GRUPO A

Día	Asisten	Faltan
1º	25	5
2º	$0'8 \cdot 25 + 0'4 \cdot 5 = 22$	$0'2 \cdot 25 + 0'6 \cdot 5 = 8$
3º	$0'8 \cdot 22 + 0'4 \cdot 8 =$	$0'2 \cdot 22 + 0'6 \cdot 8 =$

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$
4º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix}$
5º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'128 \\ 9'872 \end{pmatrix}$
...
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO B

Día	Asisten	Faltan
1º	30	0
2º	$0'8 \cdot 30 + 0'4 \cdot 0 = 24$	$0'2 \cdot 30 + 0'6 \cdot 0 = 6$
3º	$0'8 \cdot 24 + 0'4 \cdot 6 =$	$0'2 \cdot 22 + 0'6 \cdot 6 =$

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$
...
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO C

Día	Asisten	Faltan
1º	0	30
2º	$0'8 \cdot 0 + 0'4 \cdot 30 = 12$	$0'2 \cdot 0 + 0'6 \cdot 30 = 18$
3º	$0'8 \cdot 12 + 0'4 \cdot 18 =$	$0'2 \cdot 12 + 0'6 \cdot 18 =$

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$
...
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO D

Día	Asisten	Faltan
1º	20	10
2º	$0'8 \cdot 20 + 0'4 \cdot 10 = 20$	$0'2 \cdot 20 + 0'6 \cdot 10 = 10$
3º	$0'8 \cdot 20 + 0'4 \cdot 10 =$	$0'2 \cdot 20 + 0'6 \cdot 10 =$

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
...
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$