

Unidade 5: Xeometría métrica do espazo (I)

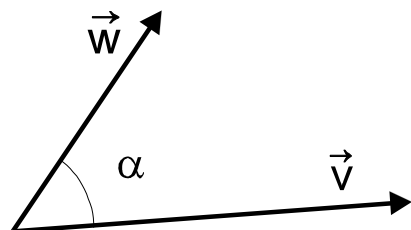
Programa:

1. Produto escalar
 - 1.1. Definición.
 - 1.2. Interpretación xeométrica.
 - 1.3. Propiedades.
2. Perpendicularidade.
3. Módulo dun vector.
4. Ángulo entre dous vectores.
5. Ecuación normal do plano.
6. Distancias e ángulos.
 - 6.1. Distancia entre dous puntos.
7. Distancias a un plano.
 - 7.1. Distancia dun punto a un plano.
 - 7.2. Entre dous planos.
 - 7.3. Distancia dunha recta a un plano.
8. Ángulos no espazo.
 - 8.1. Entre dous planos.
 - 8.2. Entre dúas rectas.
 - 8.3. Entre recta e plano.

Produto escalar

Dados dous vectores libres do espazo, $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ definimos o seu **Produto escalar** como:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) & \text{se } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{w} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{se } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$



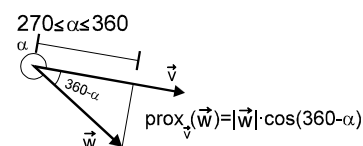
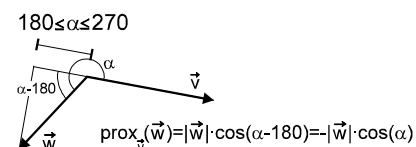
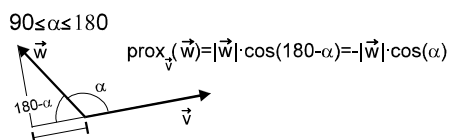
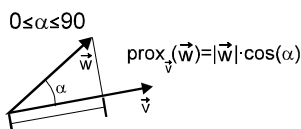
O produto escalar de dous vectores é igual ó produto dos seus módulos polo coseno do ángulo que forman (observa que o produto escalar de dous vectores é un número).

O produto escalar é unha operación na que se mesturan lonxitudes e ángulos o que nos permitirá definir, apoiándonos nel, esas dúas características que constitúen a base da Xeometría Métrica.

Interpretación xeométrica

O valor absoluto do produto escalar é o produto do módulo de un pola proxección do outro sobre el:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})] \cdot |\vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})] \cdot |\vec{v}|$$



Demostración:

Debemos considerar a que cuadrante pertence o ángulo α pois, segundo sexa o caso, a proxección de \vec{v} sobre \vec{w} , $\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})$ estará sobre o vector ou nunha prolongación do mesmo (ver figuras):

- $0 \leq \alpha \leq 90 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w}) = |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha)$
- $90 \leq \alpha \leq 180 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w}) = |\vec{w}| \cos(180 - \alpha) = -|\vec{w}| \cos(\alpha)$
- $180 \leq \alpha \leq 270 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w}) = |\vec{w}| \cos(\alpha - 180) = -|\vec{w}| \cos(\alpha)$
- $270 \leq \alpha \leq 360 \Rightarrow \text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w}) = |\vec{w}| \cos(360 - \alpha) = |\vec{w}| \cos(\alpha)$

Polo tanto: $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})] \cdot |\vec{w}| = [\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})] \cdot |\vec{v}|$

Propiedades do produto escalar

1. Conmutativa: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

Só hai que ter en conta que $\cos(\alpha) = \cos(360 - \alpha)$.

2. Distributiva: $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{n} \in V^3 \quad \vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{n}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{n}$

3. Asociativa cun escalar:

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \quad \forall \alpha \in R \quad \alpha \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\alpha \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\alpha \cdot \vec{w})$$

Perpendicularidade

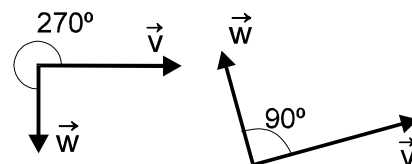
Dous vectores non nulos son perpendiculares se e só se o seu Produto escalar é 0.

Demostración:

“ \Rightarrow ” Se dous vectores son perpendiculares, o coseno do ángulo que forman é 0 e, polo tanto, o seu produto escalar tamén

“ \Leftarrow ” Sexan $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0} \in V^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$:

$$|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) = 0 \xrightarrow{\substack{\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{v}| \neq 0 \\ \vec{w} \neq \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{w}| \neq 0}} \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$



Vectores perpendiculares

Base ortonormal

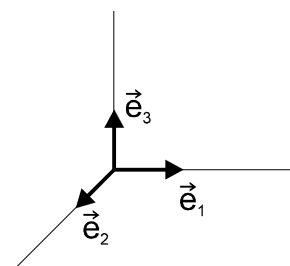
Dada unha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dos vectores libres do espazo, diremos que é **ortonormal** se cumpre as condicións:

$$1. \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$$

$$2. \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad \text{se } i \neq j \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$$

Intuitivamente unha base ortonormal é a que está formada por vectores de módulo 1 e perpendiculares entre si.

No sucesivo, suporemos que tódalas bases son ortonormais, non sendo que se indique o contrario.



Expresión analítica do produto escalar

Sexan os vectores libres $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$ e $\vec{w} = w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3$ expresados coma combinación lineal dos elementos dunha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3)$$

Utilizando a propiedades 2) do produto escalar, queda:

$$\begin{aligned} &= (v_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1 + w_2 \cdot \vec{e}_2 + w_3 \cdot \vec{e}_3) = \\ &= (v_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1) + (v_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (w_2 \cdot \vec{e}_2) + (v_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (w_3 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1) + (v_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (w_2 \cdot \vec{e}_2) + (v_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (w_3 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_1 \cdot \vec{e}_1) + (v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_2 \cdot \vec{e}_2) + (v_3 \cdot \vec{e}_3) \cdot (w_3 \cdot \vec{e}_3) = \end{aligned}$$

Pola propiedade 3) obtemos:

$$\begin{aligned} &= (v_1 \cdot w_1) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + (v_1 \cdot w_2) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + (v_1 \cdot w_3) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_2 \cdot w_1) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + (v_2 \cdot w_2) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + (v_2 \cdot w_3) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) + \\ &\quad (v_3 \cdot w_1) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + (v_3 \cdot w_2) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + (v_3 \cdot w_3) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \end{aligned}$$

Se a base é ortonormal, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ e $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ ($i \neq j$), resulta:

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

En xeral, empregaremos a expresión analítica do produto escalar para calcúlalo e a definición para interpretalo xeometricamente.

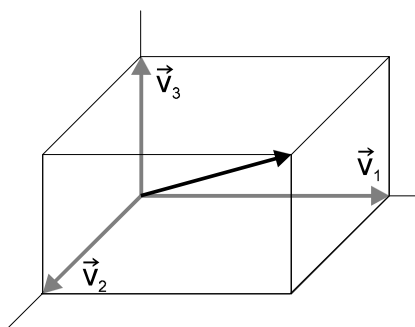
Exemplo:

Cálculo do produto escalar dos vectores $(-1, 4, 3)$ e $(6, 3, -2)$

Solución:

$$(-1, 4, 3) \cdot (6, 3, -2) = -1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$$

Como o produto escalar é 0, os vectores son perpendiculares.



Módulo dun vector

Dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, podemos calcular o seu módulo utilizando o produto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(0) = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Por compoñentes, respecto dunha base ortonormal, resulta:

$$|(v_1, v_2, v_3)| = \sqrt{(v_1, v_2, v_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Interpretación xeométrica: O módulo dun vector corresponde a súa lonxitude. O vector é a diagonal dun ortoedro de dimensións v_1 , v_2 e v_3 . Para calcular a súa lonxitude aplicamos Teorema de Pitágoras:

$$l = \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |\vec{v}|$$

Exemplo:

Cálculo do módulo do vector $(-2, 1, 2)$

Solución:

$$|(-2, 1, 2)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Exemplo:

Atopa un vector coa mesma dirección que $\vec{v} = (-3, 0, 4)$ e que teña módulo 1

Solución:

Calculamos o módulo do vector: $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

O vector pedido será: $\vec{w} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{5} (-3, 0, 4) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

Ten en conta que ese non é o único vector nas condicións do exercicio, o seu oposto, $-\vec{w} = \left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$, tamén ten a mesma dirección de \vec{v} e módulo 1.

Ángulo de dous vectores

Dados $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, podemos calcular o coseno do ángulo que forman utilizando o produto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Por compoñentes, respecto dunha base ortonormal, resulta:

$$\cos(\alpha) = \frac{V_1 \cdot W_1 + V_2 \cdot W_2 + V_3 \cdot W_3}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \cdot \sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}}$$

Exemplo:

Coseno do ángulo que forman os vectores (2,-6,3) e (-2,1,2)

Solución:

$$\left. \begin{aligned} |(-2,1,2)| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \\ |(2,-6,3)| &= \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7 \\ (-2,1,2) \cdot (2,-6,3) &= -4 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{-4}{3 \cdot 7} = -\frac{4}{21}$$

Ecuación normal no plano

Sexa $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto do plano e $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ un vector perpendicular ó plano.

Un punto xenérico do plano, $X=(x,y,z)$, caracterízase porque o vector que vai de P a X, $\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP}$, está contido no plano e, polo tanto, é perpendicular ó vector \vec{n} :

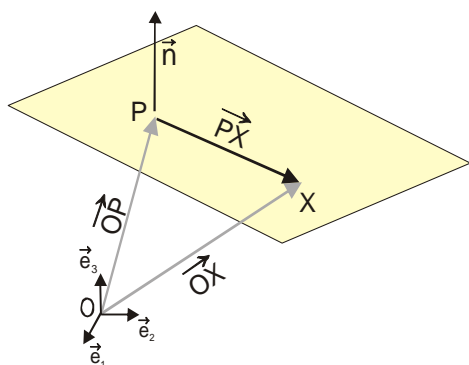
$$X \in \pi \Leftrightarrow \vec{PX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{OX} - \vec{OP}) \cdot \vec{n} = 0$$

Por compoñentes queda:

$$[(x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)] \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0$$

- A expresión anterior recibe o nome de **ecuación normal** do plano.
- O vector \vec{n} é o **vector característico** do plano.

Se desenvolvemos a expresión anterior aplicando as propiedades do produto escalar, obtemos a ecuación xeral do plano:



$$(n_1x + n_2y + n_3z) - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$$

↓

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Observa que os coeficientes de x, y e z na ecuación xeral do plano son as compoñentes dun vector perpendicular ó plano.

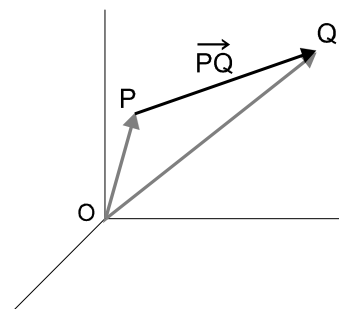
Distancia entre dous puntos

Definimos a **distancia entre dous puntos** do espazo P e Q como o módulo do vector que vai dun ó outro:

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = |\vec{OQ} - \vec{OP}|$$

Por compoñentes :

$$\left. \begin{array}{l} P = (p_1, p_2, p_3) \\ Q = (q_1, q_2, q_3) \end{array} \right\} d(P, Q) = |(q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)|$$



$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Exemplo:

Distancia entre P(1,-3,-2) e Q(2,5,1)

Solución:

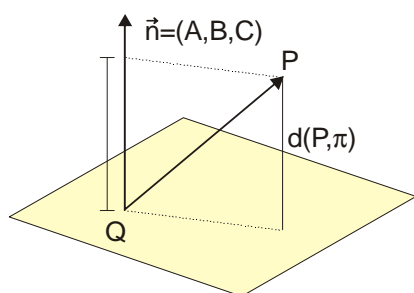
$$\vec{PQ} = (2, 5, 1) - (1, -3, -2) = (1, 8, 3)$$

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{74}$$

Distancia dun punto a un plano

Definimos a distancia dun punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ como a distancia do punto P á súa proxección ortogonal sobre o plano.

A distancia é igual á proxección do vector \vec{QP} (Q un punto calquera do plano) sobre \vec{n} (vector normal ó plano):



Observa que a proxección de P sobre o plano podemos calculala como intersección da recta perpendicular ao plano pasando por P co propio plano.

$$\text{prox}_{\vec{n}}(\vec{QP}) = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{[(p_1, p_2, p_3) - (q_1, q_2, q_3)] \cdot (A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$d(P, \pi) = \left| \frac{A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 - (A_1 q_1 + B q_2 + C q_3)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Dado que Q é un punto do plano, verifica a súa ecuación:

$$A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3 + D = 0 \Rightarrow A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3 = -D$$

A expresión da distancia queda:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{A_1 p_1 + B p_2 + C p_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Distancia entre dous planos

Cando se cortan ou son coincidentes, consideraremos que a distancia é 0.

Se son paralelos, a distancia entre eles será igual á distancia dun punto calquera dun dos planos ó outro.

Exemplo:

Distancia entre os planos $\pi \equiv 2x - 6y + 4z - 5 = 0$ e

$$\pi' \equiv -3x + 9y - 6z - 6 = 0$$

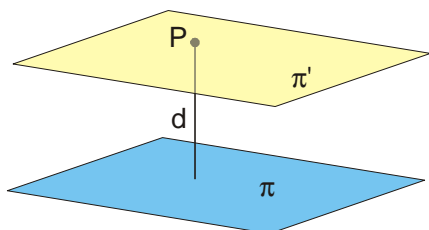
Solución:

En primeiro lugar debemos comprobar que efectivamente son paralelos estudando se os seus vectores característicos teñen a

mesma dirección: $\frac{2}{-3} = \frac{-6}{9} = \frac{4}{-6} \Rightarrow$ son paralelos

Obtemos un punto de π' dándolle valores a dúas das coordenadas e despejando a terceira: $(-2, 0, 0)$

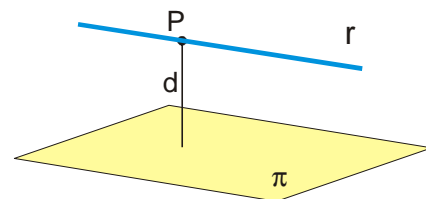
$$d(P, \pi) = \left| \frac{2 \cdot (-2) - 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 4^2}} \right| = \frac{9}{\sqrt{56}}$$



Distancia dunha recta a un plano

Se a recta corta ao plano ou se está contida nel, consideraremos que a distancia é 0.

Se a recta é paralela ó plano, a distancia será igual á distancia dun punto calquera da recta ó plano.



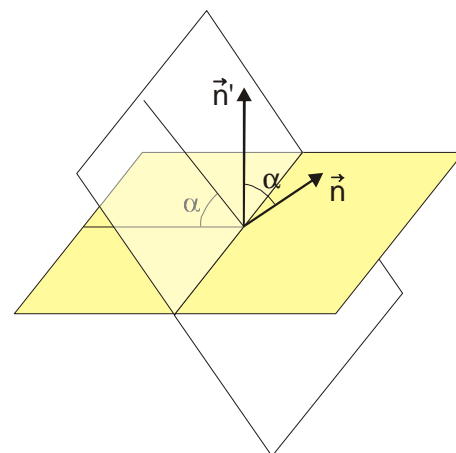
Ángulo entre dous planos que se cortan

Dous planos córtanse formando un diedro.

Ao falar de ángulo que forman os planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ e $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ referímonos ao menor dos ángulos diedros que forman (cando non sexan iguais, naturalmente).

O coseno dese ángulo coincide co valor absoluto do coseno dos vectores característicos dos planos:

$$\cos(\pi, \pi') = \left| \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \right|$$

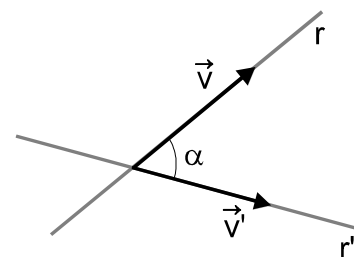


Ángulo entre dúas rectas que se cortan

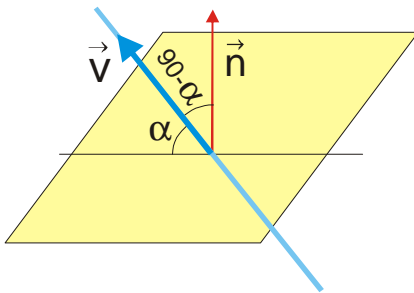
É o menor dos dous ángulos que forman.

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{v}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ vectores de dirección das rectas r e r' . Segundo sexan os sentidos de \vec{v} e \vec{v}' , o ángulo que forman é igual ó ángulo das rectas (ou o complementario).

En calquera caso, o coseno do ángulo que forman as rectas coincide co valor absoluto do coseno do ángulo que forman os vectores de dirección:



$$\cos(r, r') = \left| \frac{v_1 \cdot v'_1 + v_2 \cdot v'_2 + v_3 \cdot v'_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \sqrt{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2}} \right|$$



Podemos calcular a proxección da recta sobre o plano como a intersección do plano cun plano perpendicular que conteña a propia recta.

Ángulo dunha recta e un plano que se cortan

É o que forma a recta coa súa proxección ortogonal sobre o plano.

Se $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é un vector dirección da recta e $\vec{n} = (A, B, C)$ é o vector característico do plano, o ángulo que forman eses vectores é complementario do que forman a recta e o plano.

Como o coseno dun ángulo é igual ó seno do complementario:

$$\sin(r, \pi) = |\cos(\vec{v}, \vec{n})| = \left| \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right|$$