Exercicios de autoavaliación

1 Dados os vectores (2,2,-1) e (-1,1,0), pídese:

a) Comprobar que son ortogonais.

b) Atopar outros dous vectores coa mesma dirección ca eses e módulo 1.

c) Atopar outro vector que forme cos anteriores unha base ortonormal de V^3.

2 Atopa a ecuación xeral do plano que:

a) Contén ós "eixes" de coordenadas OX e OY.

b) Pasa polo punto (0,-2,1) e é perpendicular á recta:

$$(x,y,z) = (5,-1,2) + t(1,2,-1)$$

c) Pasa polo punto (1,2,3) e é perpendicular á recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

3 Atopa a ecuación das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos (1,4,-1) e (2,-1,0).

b) Recta perpendicular ó plano 3x-y+2z-4=0 pasando polo punto (0,1,5).

c) Recta pasando polo punto (3,2,1) e paralela á recta: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$

4 Dada a recta r de ecuación $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ e o punto P=(3,-7,-2), determina a ecuación do plano que contén a recta e está a distancia 3 do punto.

5 Os puntos *P* = (1,1,0) e Q = (0,2,1) son dous vértices contiguos dun rectángulo. Un terceiro vértice está sobre a recta de ecuacións $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Determina os vértices dun rectángulo que verifique as condicións anteriores.

6 Atopa o punto simétrico de P(2,-3,5) en relación á recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = -7 \\ x + 2y - z = -6 \end{cases}$

7 Dado o punto P(2,0,-1) e o plano $\alpha \equiv 3x + y - z - 1 = 0$. Calcula o punto Q, simétrico a P, respecto ó plano α.

8 Calcula o ángulo que forman a recta $r \equiv (x, y, z) = (2, -1, -3) + \alpha(1, 6, 0)$ e o plano pasando polo punto P(-2,6,1) e con vector característico (vector normal asociado) $\vec{v} = (1, 1, 3)$.

9 Determinar o plano paralelo a $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-10}{4}$ e contendo a $r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$

10 Calcula o ángulo que forman as rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$ e $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

Exercicios de autoavaliación

1 Dados os vectores (2,2,-1) e (-1,1,0), pídese:

a) Comprobar que son ortogonais.

b) Atopar outros dous vectores coa mesma dirección ca eses e módulo 1.

c) Atopar outro vector que forme cos anteriores unha base ortonormal de V^3.

Resolución:

Dous vectores son ortogonais se, e só se, o seu produto escalar é 0:

a) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow (2,2,-1) \cdot (-1,1,0) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$ Son ortogonais.

b) Para obter un vector coa mesma dirección ca outro e con módulo 1 só temos que multiplicar o vector polo inverso do módulo:

$$|(2,2,-1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3}(2,2,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \quad \text{ten módulo 1}$$

$$|(-1,1,0)| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{ten módulo 1}$$

c) Un vector que forme cos anteriores unha base ortonormal ten que ser perpendicular a eles e ter módulo 1.

Lembra que o produto vectorial de dous vectores é outro vector perpendicular a eles:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \wedge \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Ese vector xa ten módulo 1 porque o módulo do produto vectorial de dous vectores é o produto dos módulos (neste caso 1 e 1) polo seno do ángulo que forman (e sen(90º)=1). Comprobémolo:

$$\left|\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{16}{18}} = 1$$

2 Atopa a ecuación xeral do plano que:

a) Contén ós “eixes” de coordenadas OX e OY.

b) Pasa polo punto (0,-2,1) e é perpendicular á recta:

$$(x,y,z) = (5,-1,2) + t(1,2,-1)$$

c) Pasa polo punto (1,2,3) e é perpendicular á recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Resolución:

a) Tendo en conta que un vector característico dese plano é o vector unitario coa dirección do eixe OZ: $\vec{n} = (0,0,1)$, a ecuación do plano será: $[(x,y,z) - (0,0,0)] \cdot (0,0,1) = 0 \rightarrow z = 0$

b) O vector de dirección da recta é un vector característico do plano que se pide, polo tanto:

$$[(x,y,z) - (0,-2,1)] \cdot (1,2,-1) = 0 \rightarrow x + 2y - z + 5 = 0$$

c) As ecuacións xerais dunha recta corresponden a dous planos que, ó cortarse, determinan esa recta. Polo tanto a recta está contida en cada un dos planos e os vectores característicos deses planos son perpendiculares ó vector de dirección da recta: Eses vectores son vectores de dirección do plano que buscamos:

$$\pi \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \alpha(1,-3,1) + \beta(2,1,-1) \rightarrow 2x + 3y + 7z - 29 = 0$$

3 Atopa a ecuación das seguintes rectas:

a) Recta que pasa polos puntos (1,4,-1) e (2,-1,0).

b) Recta perpendicular ó plano 3x-y+2z-4=0 pasando polo punto (0,1,5).

c) Recta pasando polo punto (3,2,1) e paralela á recta: $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$

Resolución:

Partiremos da ecuación vectorial da recta, $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + t \cdot (v_1,v_2,v_3)$, ou da ecuación continua, $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$, necesitamos un punto da recta e un vector de dirección.

a) $\vec{v} = (1,4,-1) - (2,-1,0) = (-1,5,-1) \rightarrow r \equiv (x,y,z) = (2,-1,0) + t(-1,5,-1)$ Ecuación vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -1 + 5t \\ z = -t \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5x + y = 9 \\ x - z = 2 \end{array}\right\} \text{ Ecuacións xerais} \qquad \frac{x-0}{1} = \frac{y-9}{-5} = \frac{z+2}{1} \text{ Ecuación continua.}$$

b) O vector característico do plano é un vector de dirección da recta. Polo tanto:

$r \equiv (x,y,z) = (0,1,5) + t(3,-1,2)$ Ecuación vectorial. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ Ecuación continua.

c) O vector de dirección da recta que buscamos ten que ser perpendicular ós vectores característicos dos planos que aparecen na ecuación xeral de r. Polo tanto, podemos usar, como vector de dirección, o produto vectorial deses vectores característicos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_1 \Leftrightarrow \vec{v} = (2,1,6)$$

A ecuación continua da recta será: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{6}$

4 Dada a recta r de ecuación $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ e o punto P=(3,-7,-2), determina a ecuación do plano que contén a recta e está a distancia 3 do punto.

Resolución:

i) <u>Análise do problema</u>:

A distancia dun punto a un plano Ax+By+Cz+D=0 vén dada pola fórmula:

$$d(P,\pi) = \left| \frac{A_1p_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Como o plano ten que conter a recta, collendo dous puntos da recta e tendo en conta a fórmula anterior poderiamos propor un sistema de 3 ecuacións e 4 incógnitas que ten por solucións as ecuacións do plano que estamos buscando (só poderiamos despexar tres incógnitas en función da outra -cada plano ten infinitas ecuacións, que só se diferencian no produto por un número-):

$$\left.\begin{array}{l} P = (1,2,3) \\ Q = (1,2,3) + (1,1,4) = (2,3,7) \\ d(P,\pi) = \dfrac{|3A - 7B - 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 = -D \\ A \cdot 2 + B \cdot 3 + C \cdot 7 = -D \\ |3A - 7B - 2C + D| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{array}\right\}$$

Desafortunadamente, resolver ese sistema non semella cousa fácil, e máis tendo un valor absoluto na última ecuación o que nos obrigaría a desdobralo en dous (hai dous planos nas condicións do problema).

ii) Un xeito máis doado é utilizar a ecuación do feixe de planos que determina a recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ 4x-z-1=0 \end{cases} \rightarrow \text{Feixe de planos} \equiv \begin{cases} 4x-z-1=0 \\ 4x-z-1+\lambda(x-y+1)=0 \end{cases}$$

O plano buscado ou é o $4x-z-1=0$ ou é da forma $4x-z-1+\lambda(x-y+1)=0$ e temos que resolver unha ecuación cunha soa incógnita: λ

$$d((3,-7,-2),(4x-z-1=0)) = \frac{|12+2-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{17}} \neq 3 \qquad (4x-z-1=0 \text{ non é este plano})$$

$$4x-z-1+\lambda(x-y+1)=0 \Leftrightarrow (4+\lambda)x-\lambda y-z+(\lambda-1)=0$$

$$d((3,-7,-2),((4+\lambda)x-\lambda y-z+(\lambda-1)=0)) = \frac{|12+3\lambda+7\lambda+2+\lambda-1|}{\sqrt{(4+\lambda)^2+\lambda^2+(-1)^2}} = 3$$

$$|11\lambda+13| = 3\cdot\sqrt{2\lambda^2+8\lambda+17} \xrightarrow[\text{ó cadrado}]{\text{elevando}} 121\lambda^2+286\lambda+169 = 9\cdot(2\lambda^2+8\lambda+17)$$

$$103\lambda^2+214\lambda+16=0 \rightarrow \lambda = \frac{-214\pm\sqrt{214^2-4\cdot103\cdot16}}{2\cdot103} = \frac{-214\pm198}{206} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-16}{206} \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Os planos pedidos son:

$$\lambda=-2 \rightarrow \pi \equiv 4x-z-1+(-2)(x-y+1)=0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x+2y-z-3=0$$

$$\lambda = \frac{-8}{103} \rightarrow \pi \equiv 4x-z-1+\left(\frac{-8}{103}\right)(x-y+1)=0 \Leftrightarrow \pi \equiv \frac{404}{103}x+\frac{8}{103}y-z-\frac{111}{103}=0$$

5 Os puntos *P* = (1,1,0) e Q = (0,2,1) son dous vértices contiguos dun rectángulo. Un terceiro vértice está sobre a recta de ecuacións $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$

Determina os vértices dun rectángulo que verifique as condicións anteriores.

Resposta:

Como en todos os problemas de búsqueda de puntos, podemos buscar directamente o punto mediante a resolución de ecuacións que deba verificar ou intentar definilo como intersección de rectas ou planos.

Buscamos un punto X da recta r -polo tanto, da forma (x,0,1)- de maneira que os vectores $\overrightarrow{PX}$ e $\overrightarrow{PQ}$ sexan perpendiculares (outra posibilidade é que o sexan os vectores $\overrightarrow{QX}$ e $\overrightarrow{QP}$). Esas condicións dan lugar as ecuacións.

a. $\overrightarrow{PX}$ e $\overrightarrow{PQ}$ perpendiculares:

$$(x-1,0-1,1-0)\cdot(0-1,2-1,1-0)=0 \Rightarrow -x+1-1+1=0 \Rightarrow x=1$$

b. $\overrightarrow{QX}$ e $\overrightarrow{QP}$) perpendiculares:

$$(x-0,0-2,1-1)\cdot(1-0,1-2,0-0)=0 \Rightarrow x-2+0=0 \Rightarrow x=2$$

Outro xeito de resolver o problema sería buscar o punto de corte da recta r co plano que pasa por P (ou por Q) e ten vector característico o vector $\overrightarrow{PQ}$.

6 Atopa o punto simétrico de P(2,-3,5) en relación á recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=-7 \\ x+2y-z=-6 \end{cases}$

Resposta:

Podemos empregar diversos métodos. Un sería atopar o punto Q da recta *r* máis próximo a P e logo o simétrico.

Q será a intersección de *r* co plano que pasa por P e é perpendicular á recta *r*. Atopamos a ecuación paramétrica da recta r resolvendo o sistema:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y-z=-6 \end{cases} \xrightarrow{z=t} \left.\begin{matrix} 2x+y=3-t \\ x+2y=-6+t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot 1^{a}-2^{a}:\ x=4-t \\ 2\cdot 2^{a}-1^{a}:\ y=-5+t \\ z=t \end{matrix}\right\}$$

A ecuación do plano que pasa por P e perpendicular á recta será:

$$[(x,y,z)-(2,-3,5)]\cdot(-1,1,1)=0 \Rightarrow -x+y+z=0$$

O punto Q será: $-(4-t)+(-5+t)+t=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$

O punto simétrico X debe verificar: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QX} \Rightarrow (-1,1,-2)=(x,y,z)-(1,-2,3)$

O punto buscado será; $(x,y,z)=(-1,1,-2)+(1,-2,3)=(0,-1,1)$

7 Dado o punto P(2,0,-1) e o plano $\alpha \equiv 3x+y-z-1=0$. Calcula o punto Q, simétrico a P, respecto ó plano α.

Solución:

i) Un xeito de calcular ese punto é calcular o punto do plano máis próximo a P (intersección da recta que pasa por P e é perpendicular ao propio plano) e logo obter o simétrico (ver o problema anterior).

ii) Outro xeito sería calcular a distancia do punto ao plano e sumarlle ao punto un vector perpendicular ao plano co dobre desa lonxitude que obteremos a partir dun vector unitario perpendicular ao plano $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$:

- $d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+0-(-1)-1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{11}}$
- $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=(2,0,-1)+\frac{12}{\sqrt{11}}\frac{(3,1,-1)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{58}{11},\frac{12}{11},\frac{-23}{11}\right)$.

  Como non coñecemos a onde apunta o vector, é posible que a solución sexa:

  $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=(2,0,-1)+\frac{12}{\sqrt{11}}\frac{(-3,-1,1)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{-14}{11},\frac{-12}{11},\frac{1}{11}\right)$

8 Calcula o ángulo que forman a recta $r\equiv(x,y,z)=(2,-1,-3)+\alpha(1,6,0)$ e o plano pasando polo punto P(-2,6,1) e con vector característico (vector normal asociado) $\vec{v}=(1,1,3)$.

Solución:

$$\cos(\hat{A})=\left|\frac{(1,6,0)\bullet(1,1,3)}{\sqrt{1^2+6^2+0}\bullet\sqrt{1^2+1^2+3^2}}\right|=\frac{1+6}{\sqrt{37}\bullet\sqrt{11}}=0'346977\Rightarrow\hat{A}=\cos^{-1}(0'346977)=69'6975$$

9 Determinar o plano paralelo a $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-10}{4}$ e contendo a $r\equiv\begin{cases}x+y+z=-5\\x-3y-z=3\end{cases}$

Solución:

Se partimos da ecuación vectorial do plano, necesitaremos un punto e dous vectores de dirección.

Empezamos por poñer a recta *r* en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^a - 2^a: \quad -4y = -8 \Rightarrow y = 2 \\ 1^a \bullet 3 + 2^a: \quad 4x + 2z = -12 \Rightarrow z = -6 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -6 - 2t \end{cases}$$

Ecuación do plano: (x,y,z)=(0,2,-6)+α(1,0,-2)+β(2,3,4).

A ecuación xeral será:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2 + 3\beta \\ z = -6 - 2\alpha + 4\beta \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 1^a \bullet 2 + 3^a: 2x + z = -6 + 8\beta \\ 2^a: \ y = 2 + 3\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{y-2}{3} \end{array}\right\} \quad 2x + z = -6 + 8\dfrac{y-2}{3} \Rightarrow 6x - 8y + 3z = -34$$

10 Calcula o ángulo que forman as rectas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ *e* $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$

Solución:

$$\cos\left(\hat{A}\right) = \left| \frac{(2,1,1) \bullet (1,-3,1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \bullet \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{2 - 3 + 1}{\sqrt{6} \bullet \sqrt{11}} \right| = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^o$$