

Vectores libres do espazo

Vector libre: un vector libre é un segmento orientado que podemos situar en calquera lugar do espazo. Caracterízase polo **módulo**, **dirección** e **sentido**.

Suma de vectores: faise colocando un dos vectores a continuación do outro: o vector suma é o que vai desde a orixe do primeiro ata o extremo do segundo.

Produto por un número: obtemos outro vector coa mesma dirección, de módulo o produto do módulo polo número, e co mesmo sentido do vector orixinal se o número é positivo ou sentido contrario se número é negativo.

Combinación lineal dun conxunto de vectores a unha suma deses vectores multiplicados por números. Unha combinación lineal de vectores é outro vector.

Vectores coa mesma dirección: dous vectores non nulos teñen a mesma dirección cando poden situarse sobre unha mesma recta e podemos atopar un número que multiplicado por un dea o outro.

Vectores e coordenadas

Sistema de referencia: un punto, a orixe de coordenadas, e unha base vectores de V^3 que equivalen aos eixes de coordenadas.

Coordenadas do punto P son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto. O vector \vec{OP} é o **vector de posición** do punto P.

Ecuación dun plano no espazo

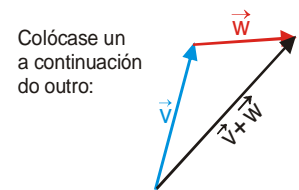
- Ecuación vectorial:** $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha \cdot (v_1, v_2, v_3) + \beta \cdot (w_1, w_2, w_3)$
- Ecuacións paramétricas**
$$\begin{cases} x = p_1 + \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot w_1 \\ y = p_2 + \alpha \cdot v_2 + \beta \cdot w_2 \\ z = p_3 + \alpha \cdot v_3 + \beta \cdot w_3 \end{cases}$$
- Ecuación xeral:** $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = D$

Ecuación da recta no espazo

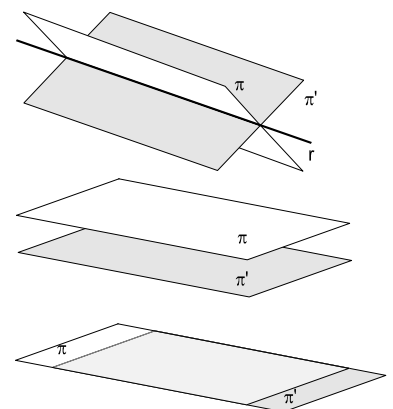
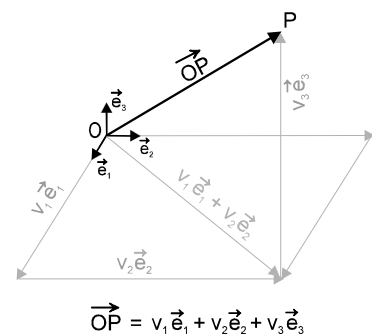
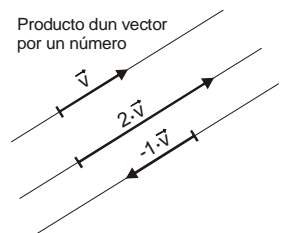
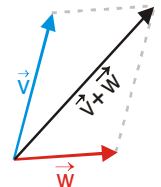
- Ecuación vectorial:** $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$
- Ecuacións paramétricas**
$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$$
- Ecuación continua:** $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$
- Ecuación xeral:**
$$\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Posición relativa de dous planos

- Cortarse nunha recta.
- Ser paralelos.
- Ser coincidentes.



Empregando o método do paralelogramo: colócanse coa orixe en común e complétase o paralelogramo



Estudar a posición relativa de dous planos $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$ e $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$ equivale a

resolver o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

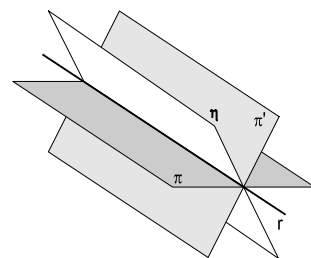
Un sistema de 2 ecuacións e 3 incógnitas. Poden darse os seguintes casos:

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 1$, sistema indeterminado. Coeficientes son proporcionais: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$ sistema indeterminado. Os planos córtanse nunha recta.
- $[\text{Rango}(A) = 1] \neq [\text{rango}(M) = 2]$, sistema incompatible. Planos paralelos. $\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

Feixe de planos

Conxunto de planos que se cortan nunha recta. A ecuación dun plano calquera do

feixe será: $\eta \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D + t(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$



Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden adoptar 4 posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelas.
- Ser coincidentes.
- Cruzarse: As rectas teñen distintas direccións pero, ó non estar no mesmo plano, non se cortan.

Sexan dúas rectas no espazo: $r_1 \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \end{cases}$ e $r_2 \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{cases}$

Estudar a posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi' \equiv A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \\ \eta \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \eta' \equiv A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{cases}$$

Poden darse os seguintes casos (os rangos son, polo menos, 2):

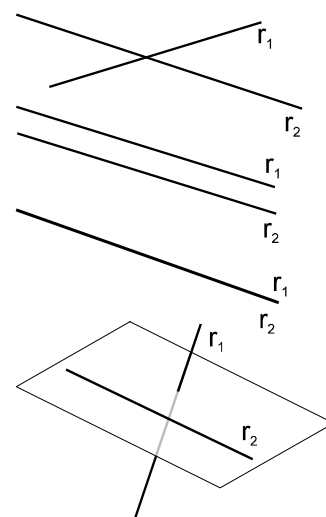
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, sistema indeterminado. As rectas teñen que ser coincidentes.
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. As rectas córtanse nun punto.
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. As rectas son paralelas..
- $[\text{Rango}(A) = 3] \neq [\text{rango}(M) = 4]$, sistema incompatible., crúzanse.

Tamén podemos estudar a posición relativa de dúas rectas, r e s , mediante a matriz:

$$\begin{cases} r \equiv (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ s \equiv (q_1, q_2, q_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Temos as seguintes posibilidades:

- **Rango 1:** Rectas coincidentes.
- **Rango 2:** As rectas córtanse.
- **Rango 3:** As rectas crúzanse.



Posición relativa dunha recta e dun plano

Unha recta e un plano no espazo poden adoptar as seguintes posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelos.
- A recta estar contida no plano.

Sexan r unha recta e π un plano no espazo, de ecuacións xerais:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \text{ e } \pi \equiv Ex + Fy + Gz = H.$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema $\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ Ex + Fy + Gz = H \end{array} \right\}$

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, o sistema é compatible indeterminado. A recta está contida no plano
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. A recta e o plano córtanse nun punto.
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. A recta e paralela ó plano.

