

Unidade 4: Xeometría Afín do espazo

Programa:

1. Vectores.

- 1.1. Vectores do espazo.
- 1.2. Coordenadas no espazo.

2. Planos.

- 2.1. Ecuación vectorial do plano
- 2.2. Outras ecuacións dun plano: paramétrica e xeral.

3. Rectas.

- 3.1. Ecuación vectorial da recta.
- 3.2. Outras ecuacións da recta: paramétrica, continua e xeral.

4. Posicións relativas.

- 4.1. Posición relativa de dúas rectas.
- 4.2. Posición relativa de dous e de tres planos.
- 4.3. Posición relativa dunha recta e dun plano.

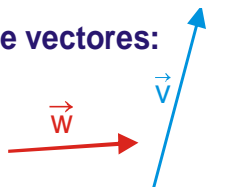
Xeometría: figuras e números

Descartes, mediante a introdución de coordenadas, conseguiu transformar os problemas xeométricos en problemas numéricos.

Partindo dese enfoque da Xeometría, trataremos dous tipos de problemas no espazo:

- **Xeometría Afín:** Problemas de incidencia e paralelismo entre rectas e planos.
- **Xeometría Euclídea:** Situacións nas que interveñen o concepto de distancia e a medida de ángulos.

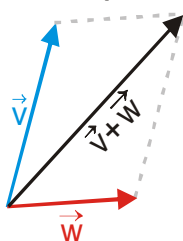
Suma de vectores:



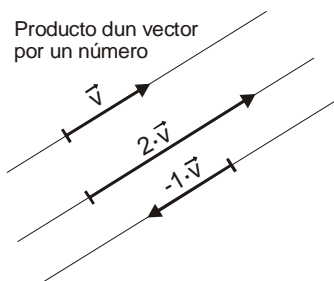
Colócase un
a continuación
do outro:

Empregando o método do paralelogramo:

colócanse coa
orixe en común
e complétase o
paralelogramo



Producto dun vector
por un número



Vectores libres do espazo

Vector libre: Intuitivamente, un vector libre é un segmento orientado que podemos situar en calquera lugar do espazo.

Un vector libre queda caracterizado coñecendo:

- **Módulo:** Lonxitude do segmento.
- **Dirección:** A recta que o contén e tódalas paralelas a ela.
- **Sentido:** Para cada dirección hai dous sentidos.

Suma de vectores: A suma de vectores libres do plano faise colocando un dos vectores a continuación do outro: O vector suma é o que vai desde a orixe do primeiro ata o extremo do segundo (outro xeito equivalente de definir a suma de vectores é mediante a regra do paralelogramo).

Produto por un número: Ó multiplicar un vector por un número real obtemos outro vector coa mesma dirección, de módulo o produto do módulo polo número, e co mesmo sentido do vector orixinal se o número é positivo ou sentido contrario se número é negativo.

Con esas operacións os vectores libres do espazo teñen estrutura de espazo vectorial sobre \mathbb{R} e chamámoslle V^3 .

Chamaremos **combinación lineal** dun conxunto de vectores a unha suma deses vectores multiplicados por números. Unha combinación lineal de vectores é outro vector.

Nos espazos vectoriais chámase **dimensión** ao número máximo de vectores independentes.

Se eliximos tres vectores do espazo con diferentes direccións e que non están os tres contidos no mesmo plano, eses vectores son independentes pois non é posible poñer un deles como

combinación dos outros dous. A dimensión deste espazo vectorial é, pois, 3.

Eliximos tres vectores independentes, que chamaremos **base** $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de V^3 . Podemos poñer cada vector do espazo como combinación lineal dos elementos desa base:

$$\forall \vec{v} \in V^3 \quad \exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$$

Dos números v_1, v_2 e v_3 dicimos que son as **compoñentes** do vector \vec{v} respecto da base B .

Unha vez elixida unha base, podemos utilizar, en lugar dun segmento orientado para cada un dos vectores libres do espazo, as súas compoñentes (v_1, v_2, v_3) .

Vectores coa mesma dirección

Definición: Diremos que dous vectores non nulos están aliñados cando teñen a mesma dirección.

Teorema:: Se dous vectores teñen a mesma dirección, entón podemos atopar un número que multiplicado por un dea o outro.

A implicación contraria tamén é certa:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$$

Demostración: Se os vectores teñen o mesmo senso, o número é

$$\lambda = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|} \text{ e, se teñen senso contrario, é } \lambda = -\frac{|\vec{v}|}{|\vec{w}|}.$$

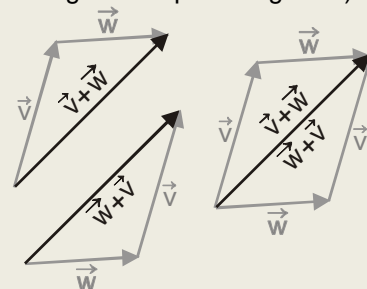
Só temos que ter en conta a definición do produto dun vector por un número para comprobar que \vec{v} e $\lambda \cdot \vec{w}$ teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido. Son iguais.

Vectores e coordenadas

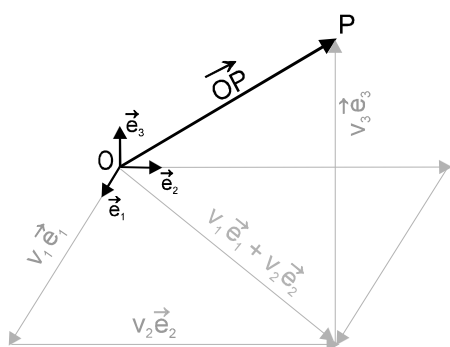
Chámase **espazo afín** ó conxunto E dos puntos do espazo cos vectores libres V^3 e as súas operacións: Espazo afín $\equiv (E, V^3, +, \cdot)$.

V^3 espazo vectorial:

O diagrama seguinte demostra que a suma de vectores é conmutativa (calquera que sexa a orde da suma, o vector resultante é a diagonal do paralelogramo).



De xeito similar, poderíamos ir demostrando que os vectores do espazo cumpren tódalas propiedades que definen a



$$\vec{OP} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Exemplo:

$$\vec{OQ} \equiv (2, 5, -1)$$

$$\vec{OP} \equiv (0, -2, 3)$$

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} \equiv \\ &\equiv (2 - 0, 5 - (-2), -1 - 3) = \\ &= (2, 7, -4)\end{aligned}$$

Fixamos un **sistema de referencia**: Un punto, que será a orixe de coordenadas, e unha base vectores de V^3 que, en certo xeito, equivalen aos eixes de coordenadas¹.

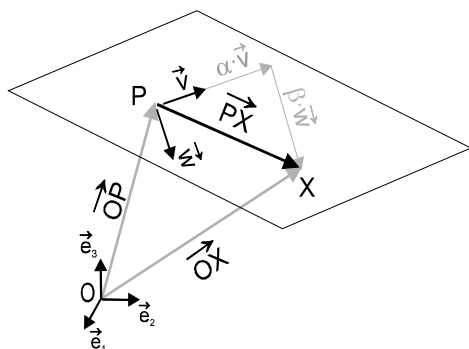
As **coordenadas** do punto P son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto: $P \equiv (v_1, v_2, v_3)$.

Ó vector \vec{OP} , que vai da orixe a P, chamáremoslle **vector de posición** do punto P.

Dese xeito, podemos interpretar a terna (v_1, v_2, v_3) como as coordenadas dun punto ou como as compoñentes do vector de posición do punto, o que resulta realmente útil á hora de abordar algúns problemas.

Podemos calcular o vector que vai dun punto a outro simplemente restando as súas coordenadas:

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$



Exemplo: Atopar a ecuación do plano π que pasa polos puntos $(2,2,3)$, $(0,1,3)$ e $(3,2,5)$.

Solución: Utilizamos como vectores de dirección do plano os vectores que van dun dos puntos ós outros dous:

$$\vec{v} = (2,2,3) - (0,1,3) = (2,1,0)$$

$$\vec{w} = (3,2,5) - (0,1,3) = (3,1,2)$$

Ecuación vectorial do plano π :

$$(x, y, z) = (0,1,3) + \alpha(2,1,0) + \beta(3,1,2)$$

Ecuación dun plano no espazo

Para descubrir a ecuación dun plano no espazo temos que atopar unha condición que só a verifiquen os puntos do plano.

Partiremos dun punto do plano, P, e de dous vectores *contidos* no plano e con distinta dirección, \vec{v} e \vec{w} , que chamaremos **vectores de dirección** do plano.

Dado un punto xenérico X do plano, o vector que vai de P a X, \vec{PX} , está contido no plano e, polo tanto, pode poñerse como

combinación lineal de \vec{v} e \vec{w} : $\vec{PX} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \Leftrightarrow \vec{OX} = \vec{OP} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

Esa ecuación só a cumpren os puntos do plano: é a **ecuación vectorial do plano**.

Por compoñentes, a ecuación anterior queda:

¹ Para poder definir de xeito formalmente riguroso os eixes de coordenadas debemos definir antes como medir a escala de cada eixe e a perpendicularidade. Empregando vectores evitamos eses problemas.

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha \cdot (v_1, v_2, v_3) + \beta \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

Sendo (x, y, z) un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) un punto do plano e (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) son vectores de dirección.

Dando valores a α e a β obtemos puntos do plano. Por exemplo, para $\alpha=1$ e $\beta=-2$, temos:

$$(0, 1, 3) + 1 \cdot (2, 1, 0) - 2(3, 1, 2) = (-4, 0, -1)$$

Outras ecuacións dun plano

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtemos outras ecuacións dun plano no espazo:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot w_1 \\ y &= p_2 + \alpha \cdot v_2 + \beta \cdot w_2 \\ z &= p_3 + \alpha \cdot v_3 + \beta \cdot w_3 \end{aligned} \right\} \text{ecuacións paramétricas}$$

Eliminando os parámetros α e β obtemos a **ecuación xeral**:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = D$$

Exemplo: Calculemos as ecuacións paramétrica e xeral do plano π anterior.

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\alpha + 3\beta \\ y &= 1 + \alpha + \beta \\ z &= 3 + 2\beta \end{aligned} \right\}$$

Ecuación xeral:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\alpha + 3\beta \\ y &= 1 + \alpha + \beta \\ z &= 3 + 2\beta \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x - 2y &= -2 + \beta \\ z &= 3 + 2\beta \end{aligned}$$

$$2x - 4y - z = -7$$

Ecuación da recta no espazo

Partiremos dun punto da recta, P , e dun vector coa mesma dirección ca recta, \vec{v} , **vector de dirección** da recta.

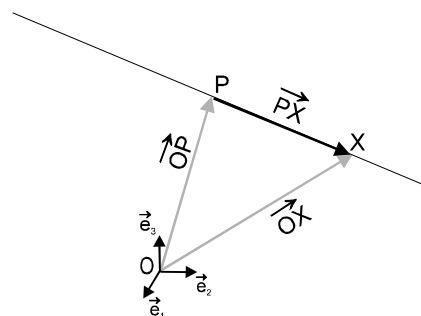
O vector que vai de P a un punto xenérico X da recta, \vec{PX} , ten a mesma dirección ca \vec{v} (o que significa que $\vec{PX} = \lambda \cdot \vec{v}$) e esa condición só a cumpren os puntos da recta. É a **ecuación vectorial** dunha recta no espazo:

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \Leftrightarrow \vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Escrita en forma de compoñentes, queda:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Onde (x, y, z) é un punto xenérico, (p_1, p_2, p_3) é un punto da recta e (v_1, v_2, v_3) é un vector de dirección.



Exemplo: Atopar a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(1,0,-3)$ e $B(3,-2,2)$.

Solución: Un vector de dirección da recta é o vector \vec{AB} :

$$\vec{v} = (3, -2, 2) - (1, 0, -3) = (2, -2, 5)$$

Ecuación vectorial da recta:

$$(x, y, z) = (1, 0, -3) + \lambda(2, -2, 5)$$

Dando valores a λ obtemos puntos da recta. Por exemplo, para $\lambda=1$, temos:

$$(1, 0, -3) + 1 \cdot (2, -2, 5) = (3, -2, 2)$$

Outras ecuacións da recta

Desenvolvendo a ecuación vectorial obtemos outras expresións da ecuación dunha recta no espazo:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) \xrightarrow{\text{operando e igualando}} \begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$$

Exemplo: Ecuacións paramétricas, continua e xeral de:

$$(x, y, z) = (1, 0, -3) + \lambda(2, -2, 5)$$

Solución: Ecuacións paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$$

Ecuacións continuas:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{2} \\ \lambda = \frac{y}{-2} \\ \lambda = \frac{z+3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{5}$$

Ecuacións xerais:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x - 2z = 11 \end{cases}$$

Fixarse que, en realidade, son as ecuacións de dous planos (que

Expresión que recibe o nome de **ecuacións paramétricas**.

Despexamos o λ en cada unha das ecuacións:

$$\lambda = \frac{x-p_1}{v_1} \quad \lambda = \frac{y-p_2}{v_2} \quad \lambda = \frac{z-p_3}{v_3}$$

Igualando obtemos as **ecuacións continuas** da recta:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$

Tendo en conta que unha recta queda determinada pola intersección de dous planos, tamén podemos describir unha recta mediante un sistema formado polas ecuacións deses planos:

$$\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{Ecuacións xerais da recta.}$$

Posición relativa de dous planos

Dous planos no espazo só poden adoptar 3 posicións relativas:

- Cortarse nunha recta.
- Ser paralelos.
- Ser coincidentes.

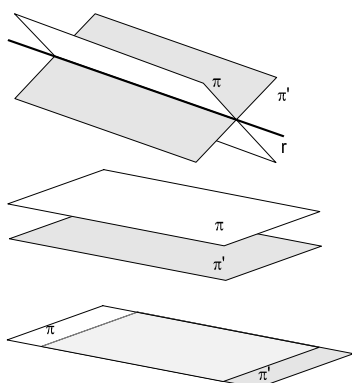
Sexan π e π' dous planos no espazo de ecuacións xerais:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz = D \quad \pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

É dun sistema de 2 ecuacións e 3 incógnitas. Poden darse os seguintes casos:



- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 1$, sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 2 parámetros (ec. paramétrica dun plano): Os planos son coincidentes.

Unha das ecuacións obtense multiplicando a outra por un número. Os coeficientes A, B, C e D son proporcionais:

$$\pi = \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Exemplo:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' &\equiv -3x - 6y + 3z = -9 \end{aligned} \right\} \\ \frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} = \frac{6}{-9}$$

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$ sistema compatible indeterminado. As solucións dependen de 1 parámetro (corresponden á ecuación paramétrica dunha recta). Os planos córtanse nunha recta.

Exemplo:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv 2x + 3y - 4z = 1 \\ \pi' &\equiv -x + 5y - z = 3 \end{aligned} \right\} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

- $[\text{Rango}(A) = 1] \neq [\text{rango}(M) = 2]$, sistema incompatible. Os planos son paralelos. Neste caso os valores dos coeficientes de x, y e z dos planos son proporcionais pero non así os termos independentes:

$$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

Exemplo:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv 2x + 4y - 2z = 6 \\ \pi' &\equiv -3x - 6y + 3z = -1 \end{aligned} \right\} \\ \frac{2}{-3} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} \neq \frac{6}{-1}$$

Feixe de planos

O conxunto de tódolos planos que se cortan nunha recta forman un **feixe de planos**.

Sexan π e π' dous planos distintos dese feixe, con ecuacións:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz = D$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z = D'$$

A intersección deses dous planos é a recta común a todos os

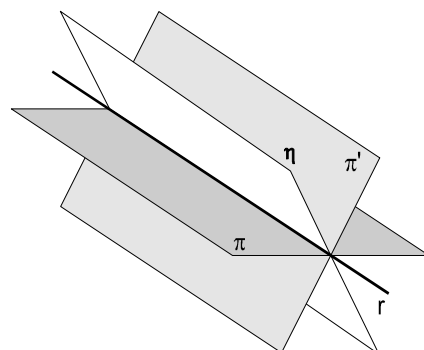
planos do feixe: $\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned} \right\} \equiv r$

Engadindo a ese sistema a ecuación de calquera outro plano do feixe, a solución non varía (segue a ser a recta r), o que só pode ocorrer se a ecuación dese plano é combinación das ecuacións de π e π' polo tanto, a ecuación dun plano calquera do feixe será:

$$\eta \equiv \alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Para non ter que manexar dous parámetros, consideramos a posibilidade de que α sexa ou non 0 (para poder dividir β/α)

$$\eta \equiv \begin{cases} \alpha \neq 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D + \frac{\beta}{\alpha}(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ \alpha = 0 \Rightarrow A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$



Exemplo: Ecuación do feixe de planos que contén os planos:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv 2x - 4z = 1 \\ \pi' &\equiv x + 5y - z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

$$\eta \equiv \alpha(2x - 4z - 1) + \beta(x + 5y - z) = 0$$

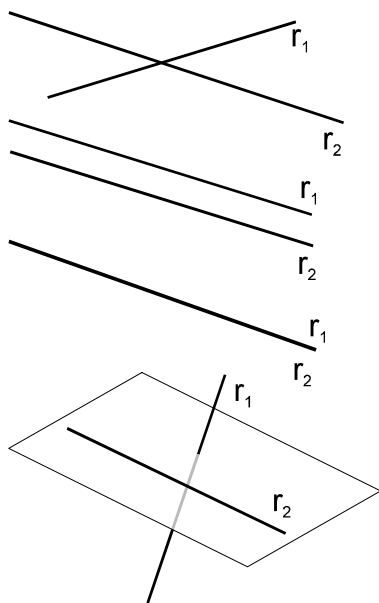
ou

$$\eta \equiv \begin{cases} 2x - 4z - 1 + t(x + 5y - z) = 0 \\ 2x - y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

(fixarse que a última ecuación é, simplemente, π')

Facendo $\frac{\beta}{\alpha} = t$ obtemos a ecuación do feixe dependendo dun único parámetro t (ó darlle valores a t obtéñense tódolos planos do feixe agás o π'):

$$\eta \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D + t(A'x + B'y + C'z + D') = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$



Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden adoptar 4 posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelas.
- Ser coincidentes.
- Cruzarse: As rectas teñen distintas direccións pero, ó non estar no mesmo plano, non se cortan.

Sexan r_1 e r_2 dúas rectas no espazo de ecuacións xerais:

$$r_1 \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \end{cases} \quad e \quad r_2 \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{cases}$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o sistema:

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ \pi' &\equiv A'_1x + B'_1y + C'_1z = D'_1 \\ \eta &\equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \eta' &\equiv A'_2x + B'_2y + C'_2z = D'_2 \end{aligned} \right\}$$

É un sistema de 4 ecuacións e 3 incógnitas que corresponden as ecuacións de 4 planos que se cortan dous a dous nunha recta.

Poden darse os seguintes casos (os rangos son, polo menos, 2):

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, sistema indeterminado. Os planos η e η' pertencen o feixe de planos que determinan π e π' . As rectas teñen que ser coincidentes.
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. As rectas córtanse nun punto.
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. Os planos η e η' son paralelos a planos do feixe que determinan π e π' . As rectas son paralelas..
- $[\text{Rango}(A) = 3] \neq [\text{rango}(M) = 4]$, sistema incompatible., η e η' non pertencen ó feixe que determinan π e π' . As rectas teñen direccións diferentes pero non se cortan, crúzanse.

Exemplo:

Se as rectas nos fosen dadas con outro tipo de ecuación:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z \quad e \quad s \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

poderíamos seguir outros camiños máis rápidos.

De aí obtemos directamente a seguinte información:

$$\left. \begin{aligned} P &= (0,1,0) \\ Q &= (1,0,0) \\ \vec{v} &= (2,-3,1) \\ \vec{w} &= (-4,2,6) \end{aligned} \right\}$$

E, así, podemos determinar o vector \overrightarrow{QP} , estudando a continuación se está ou non no mesmo plano que \vec{v} e \vec{w} .

Tamén podemos estudar a posición relativa de dúas rectas, r e s , mediante a matriz:

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv (p_1, p_2, p_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ s &\equiv (q_1, q_2, q_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Temos as seguintes posibilidades:

- **Rango 1:** Rectas coincidentes.
- **Rango 2:** As rectas córtanse (vectores de dirección non aliñados) ou son paralelas (compoñentes dos vectores de dirección proporcionais).
- **Rango 3:** As rectas crúzanse.

Posición relativa dunha recta e dun plano

Unha recta e un plano no espazo poden adoptar as seguintes posicións relativas:

- Cortarse nun punto.
- Ser paralelos.
- A recta estar contida no plano.

Sexan r unha recta e π un plano no espazo, de ecuacións xerais:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \text{ e } \pi \equiv Ex + Fy + Gz = H.$$

Estudar a súa posición relativa equivale a resolver o seguinte sistema de tres ecuacións e tres incógnitas (o rango é polo menos 2 por ser as dúas primeiras as ecuacións dunha recta):

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ A'x + B'y + C'z &= D' \\ Ex + Fy + Gz &= H \end{aligned} \right\}$$

Poden darse as seguintes posibilidades

- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 2$, o sistema é compatible indeterminado. A recta está contida no plano (o sistema ten infinitas solucións).
- $\text{Rango}(A) = \text{rango}(M) = 3$, sistema compatible determinado. A recta e o plano córtanse nun punto (solución única).
- $[\text{Rango}(A) = 2] \neq [\text{rango}(M) = 3]$, sistema incompatible. A recta é paralela ó plano (non ten solución).

Exemplo:

Posición relativa das rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z \text{ e } s \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución:

$$\left. \begin{aligned} P &= (0,1,0) \\ Q &= (1,0,0) \\ \vec{v} &= (2,-3,1) \\ \vec{w} &= (-4,2,6) \end{aligned} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiamos o rango da matriz A:

$$|(-1)| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Os vectores de dirección non teñen as compoñentes proporcionais:

$$\frac{2}{-4} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{6}$$

As rectas teñen que cortarse.

