

Unidade 9: Cálculo Diferencial

Programa:

- 1 Derivada dunha función nun punto.**
 - 1.1 Taxa de variación. Definición de derivada nun punto. Derivadas laterais.**
 - 1.2 Interpretación gráfica da derivada.**
 - 1.3 Crecemento e derivadas.**
 - 1.4 Derivadas e extremos relativos.**
 - 1.5 Continuidade e derivabilidade.**
 - 1.6 Teorema de Rolle:**
- 2 Teorema de Rolle: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.**
- 3 Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.**
- 4 Función derivada.**
 - 4.1 Definición de función derivada.**
 - 4.2 Derivadas sucesivas.**
 - 4.3 Fórmulas das funcións derivadas usuais.**

Derivada dunha función nun punto

Taxa de variación

Definimos a taxa de variación dunha función $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ como o cociente entre o incremento do valor da función e o incremento de x (tamén é chamado cociente incremental):

$$TV_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A taxa de variación é unha medida da variación media da función no intervalo.

Derivada nun punto

A derivada dunha función $f(x)$ no punto x_0 é o límite:

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo o cambio $h = x - x_0$ obtemos unha nova expresión para a

derivada:
$$Df(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A derivada é o límite das taxas de variación cando facemos que o intervalo “se reduza a un punto”. É unha medida da variación “instantánea” da función no punto.

Cando a función está definida a cachos estudamos a derivabilidade mediante límites laterais:

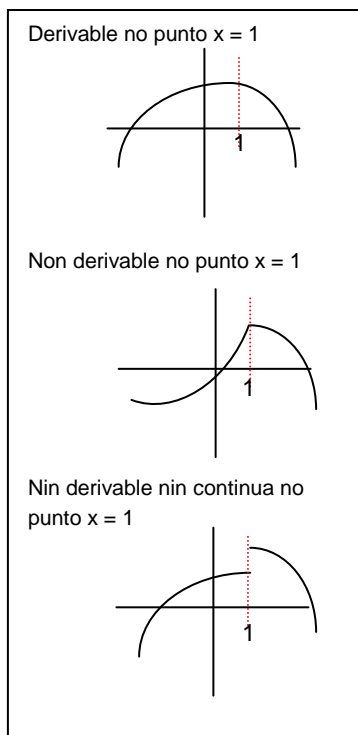
$$D^-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$D^+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se os límites coinciden, a función é derivable en x_0 .

As funcións elementais, definidas por unha soa fórmula, son derivables en tódolos puntos do seu dominio.

Que unha función sexa derivable implica que non experimenta cambios bruscos de tendencia, a súa gráfica non presenta “ángulos”.



Exemplo:

O espazo percorrido por un móbil, en metros, ven dado pola función $s = 5t^2$ (t en segundos). Cal é a súa velocidade en $t=1$?

Solución:

Hai dous tipos de velocidades:

- **Velocidade media:** É o espazo percorrido dividido entre o tempo.
- **Velocidade instantánea:** Velocidade que leva un móbil nun intre dado.

A velocidade media, por exemplo, entre $t=1$ e $t=4$ é:

$$VM_{[1,4]} = \frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{4 - 1} = 25 \frac{m}{s}$$

Observa que a velocidade media coincide coa taxa de variación.

A velocidade instantánea non pode calcularse directamente, pero pode aproximarse mediante velocidades medias. En $t=1$:

$$VM_{[1,2]} = \frac{5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1^2}{2 - 1} = 15 \frac{m}{s}$$

$$VM_{[1,1.5]} = \frac{5 \cdot 1.5^2 - 5 \cdot 1^2}{1.5 - 1} = 12.5 \frac{m}{s}$$

$$VM_{[1,1.1]} = \frac{5 \cdot 1.1^2 - 5 \cdot 1^2}{1.1 - 1} = 10.5 \frac{m}{s}$$

A velocidade instantánea será o límite desas velocidades medias:

$$v(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = 10 \frac{m}{s}$$

Observa que a velocidade instantánea é a derivada da función.

Exemplo:

Estudar se a función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ é derivable.

Solución:

- Agás en $x=2$ a función é elemental, polo tanto é derivable.
- En $x=2$ debemos estudar a derivabilidade:
 - Pola esquerda:

$$D^-f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2 + h + 2) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} v(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (x^2 - 1^2)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 5 \cdot (x + 1) = 10 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

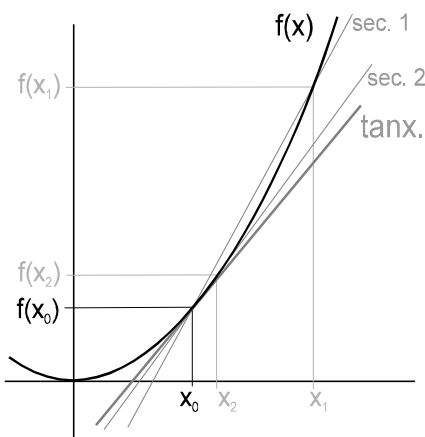
o Pola dereita:

$$D^+f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} =$$

simplificando

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4$$

As derivadas laterais non coinciden, a función non é derivable en $x=2$ (como pode apreciarse na gráfica, a función presenta un acusado cambio de tendencia nese punto).



Interpretación gráfica da derivada

Queremos atopar a ecuación da recta tanxente a gráfica dunha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$.

Para calcular a ecuación dunha recta necesitamos dous puntos, pero só temos un. O que si podemos é elixir un valor x_1 próximo x_0 e aproximar a tanxente pola secante que pasa polos puntos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e que ten por ecuación:

$$\text{sec}_1 \equiv y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Fixémonos na pendente desa recta: $m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

(Observa que esa pendente coincide coa taxa de variación da función entre x_0 e x_1).

Para mellorar a aproximación só temos que elixir un punto, x_2 ,

máis próximo ó punto de tanxencia: $m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

Se seguimos aproximándonos a x_0 , a secante transfórmase na tanxente e a súa pendente na pendente da tanxente:

$$m_{\text{tanx}} = \lim_{x \rightarrow x_0} (m_{\text{sec}}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0)$$

- A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función é igual á derivada da función nese punto.

Aproximación pola tanxente:

Podemos calcular valores dunha función, aproximándoa pola recta tanxente.

Ejemplo: Canto vale o $\ln(1'5)$?

Consideramos a función $f(x)=\ln x$
Sabendo que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \rightarrow (\ln 1)' = 1$$

E sendo $\ln(1)=0$, podemos aproximalo coa tanxente:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

$$\ln(1'5) \approx 1'5 - 1 = 0'5$$

O erro é pequeno e diminúe ó achegarnos ó punto de tanxencia.

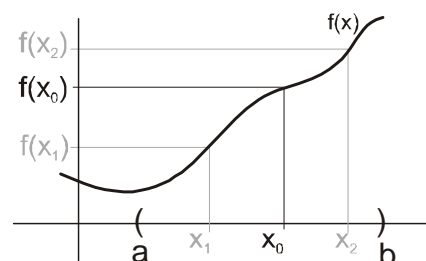
- A ecuación da **recta tanxente** a unha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ vén dada por: $y - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$

Crecemento e derivadas

Xa que a derivada mide como varía a función nun punto, se esta crece nel a derivada debe ser positiva, e reciprocamente, se a función decrece nese punto a derivada debe ser negativa. Vemos agora a formalización rigorosa desas ideas:

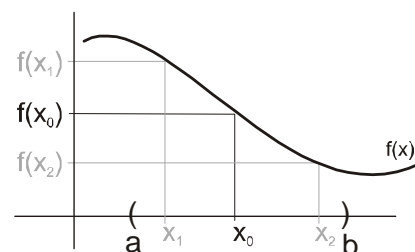
Definición: $f(x)$ definida nun intervalo (a,b) é **crecente** en x_0 se existe un entorno de x_0 , $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ tal que:

$$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Definición: $f(x)$ é **decrecente** en x_0 se existe un entorno, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ que cumpra:

$$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Teorema: Sexa $f(x)$ unha función definida nun intervalo (a,b) e derivable en $x_0 \in (a,b)$, entón:

- Se $Df(x_0) > 0$, $f(x)$ é crecente en x_0 .
- Se $Df(x_0) < 0$, $f(x)$ é decrecente en x_0 .

Demostración: a) Podemos demostralo de xeito non rigoroso tendo en conta que nun entorno de x_0 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ podemos aproximar a función pola recta tanxente de xeito que o erro sexa “desprezable”.

Sexan x_1 e x_2 pertencentes a ese entorno: $x_1 < x_2$

$$\left. \begin{aligned} f(x_2) &\approx f(x_0) + Df(x_0)(x_2 - x_0) \\ f(x_1) &\approx f(x_0) + Df(x_0)(x_1 - x_0) \end{aligned} \right\}$$

$$f(x_2) - f(x_1) \approx Df(x_0)[(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)] = Df(x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

é dicir, $f(x)$ é crecente en x_0 (o apartado b é semellante).

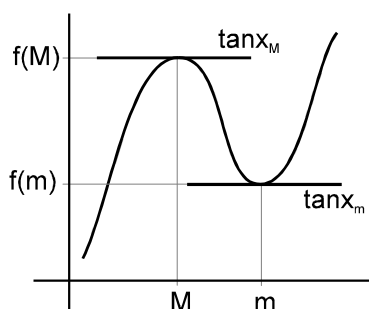
Derivadas e extremos relativos

Se nun punto houber un **máximo**, a función pasa de subir a baixar; ou sexa, a derivada pasa de ser positiva a ser negativa, logo xusto nese punto debe ser nula. A idea é recíproca se tiver un **mínimo**. Formalizamos as ideas:

Definición: $f(x)$ definida en (a,b) acada un **máximo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0 , $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ tal que:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

Definición: $f(x)$ definida en (a,b) acada un **mínimo relativo** en x_0 se existe un entorno de x_0 , $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ tal que:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$


Teorema: Sexa $f(x)$ unha función definida nun intervalo (a,b) e derivable en $x_0 \in (a,b)$ entón, se $f(x)$ ten un extremo relativo en x_0 , a súa derivada en x_0 é 0: $Df(x_0) = 0$

Demostración: Supoñamos que en x_0 hai un máximo relativo (se fose un mínimo a demostración é semellante), entón $f(x)$ é crecente antes de x_0 e decrecente despois:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \end{cases}$$

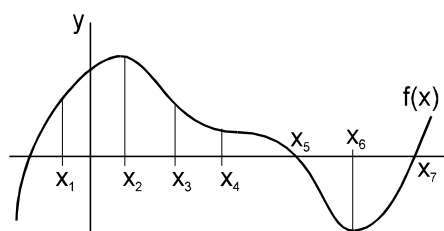
Polo tanto, a derivada pola esquerda ten que ser positiva e negativa a derivada pola dereita:

$$D^-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$D^+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Dado que a función é derivable en x_0 , as derivadas laterais teñen que coincidir e a única posibilidade é que sexan 0:

$$D^-f(x_0) = D^+f(x_0) = Df(x_0) = 0$$



Derivada positiva, a función é crecente (puntos x_1 e x_7).

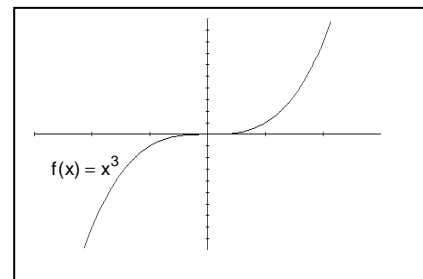
Derivada negativa, a función é decrecente (x_3 , x_5).

Derivada 0, poden darse tres posibilidades:

- **Un máximo** (punto x_2).
- **Un mínimo** (punto x_6).
- **Un punto de inflexión** (punto x_4).

O recíproco deste teorema non é certo: $Df(x_0)$ pode ser 0 e non haber un extremo en x_0 (pode haber un punto de inflexión como por exemplo en $x=0$ coa función $f(x) = x^3$)

Graficamente: A tanxente nos máximos e nos mínimos relativos da gráfica é unha recta horizontal e, polo tanto, a súa pendente é 0. Como a pendente é igual a derivada no punto, a derivada tamén ten que ser 0.



Continuidade e derivabilidade

Teorema: Se unha función $f(x)$, definida nun intervalo (a,b) , é derivable nun punto $x_0 \in (a,b)$, entón é continua nese punto.

Demostración: A derivada defínese como o límite dun cociente:

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O denominador do cociente tende a 0: $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$.

Para que exista límite, o numerador tamén ten que tender a 0, senón teríamos unha división imposible de realizar. A única opción é dar lugar á indeterminación $\frac{0}{0}$.

Logo
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = f(x_0)$$

Polo tanto a función é continua en x_0 .

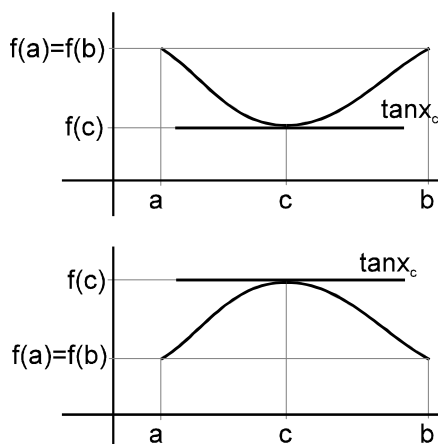
O recíproco non é certo: Unha función pode ser continua nun punto e non ser derivable nese punto. (Por exemplo, se continúa facendo un “pico”.

Teorema de Rolle

Sexa $f(x)$ unha función continua no intervalo pechado $[a,b]$, derivable no intervalo aberto (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe un punto $c \in (a,b)$ no que a derivada vale 0: $Df(c) = 0$.

Demostración: Dado que $f(x)$ é continua en $[a,b]$, polo teorema de Bolzano-Weierstass, $f(x)$ ten un máximo, M , e un mínimo, m :
 $\forall x \in [a,b] \quad f(m) \leq f(x) \leq f(M)$.

Xa demostramos que a derivada é 0 nos extremos relativos. Queda por probar que polo menos un extremo está no interior do intervalo. Distinguimos dous casos:



1. $f(m) = f(M)$, a función é constante, a derivada é 0 en tódolos puntos do intervalo (a,b) .

2. $f(m) \neq f(M)$, dado que $f(m) \leq f(a) = f(b) \leq f(M)$, temos:

$$f(m) \neq f(M) \Rightarrow \begin{cases} (M \neq a \text{ e } M \neq b) \Rightarrow M \in (a,b) \Rightarrow Df(M) = 0 \\ \text{ou} \\ (m \neq a \text{ e } m \neq b) \Rightarrow m \in (a,b) \Rightarrow Df(m) = 0 \end{cases}$$

O c sería m ou M (o que estea no interior do intervalo).

Interpretación xeométrica: A gráfica correspondente a unha función continua e derivable nun intervalo e que teña as ordenadas dos extremos iguais, ten polo menos un punto onde a tanxente é horizontal

Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial

Sexa $f(x)$ unha función continua no intervalo pechado $[a,b]$, derivable no intervalo aberto (a,b) , entón hai un punto $c \in (a,b)$ tal que: $Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

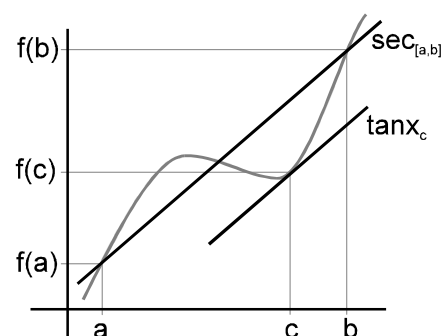
Demostración: $g(x) = [f(b) - f(a)] \cdot x - (b - a) \cdot f(x)$ cumpre as hipótese do Teorema de Rolle:

- É continua en $[a,b]$ por ser suma de funcións continuas: O polinomio $[f(b) - f(a)]x$, $[f(b) - f(a)]$ é un número, e a función $(b - a)f(x)$ que é continua por ser produto dunha función continua por un número.

- É derivable no intervalo (a,b) por ser suma de funcións derivables (as mesmas do apartado anterior).
- Ademais $g(a) = g(b)$. En efecto:

$$g(a) = [f(b) - f(a)] \cdot a - (b - a) \cdot f(a) = f(b) \cdot a - b \cdot f(a)$$

$$g(b) = [f(b) - f(a)] \cdot b - (b - a) \cdot f(b) = -f(a) \cdot b + a \cdot f(b)$$



Polo tanto existe un $c \in (a,b)$ tal que $Dg(c) = 0$:

$$g'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(x)$$

$$[f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación xeométrica: Hai polo menos un punto no intervalo (a,b) onde a tanxente á gráfica correspondente a unha función continua e derivable, é paralela á secante que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Función derivada

Se unha función $f(x)$ é derivable nun intervalo (a,b) , podemos definir a súa **función derivada**, $f'(x)$, como a función que a cada punto $x \in (a,b)$ faille corresponde-la derivada de $f(x)$ nese punto:
 $f'(x) = Df(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Exemplos:

A función $f(x)=x$ ten como función derivada $f'(x)=1$, pois

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 \quad \text{sempre.}$$

A función $f(x)=x^2$ ten como función derivada $f'(x)=2x$, pois

$$\begin{aligned} Df(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \end{aligned}$$

Derivada segunda

Se unha función $f(x)$ é derivable nun intervalo (a,b) , existe a súa función derivada, $f'(x)$, nese intervalo.

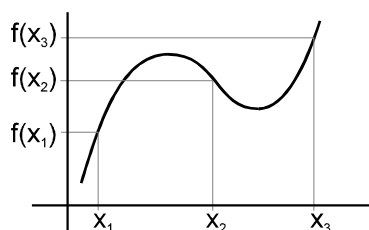
Definímo-la derivada segunda de $f(x)$ no punto $x_0 \in (a,b)$ como a

derivada, se existe, de $f'(x)$ en x_0 : $D^2f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

Curvatura:

Unha función derivable nun punto é **convexa** nese punto se a súa gráfica queda por “enriba” da recta tanxente, se queda por debaixo é **cóncava** e se a gráfica corta no punto á recta tanxente é un **punto de inflexión** (cambia a curvatura).

A derivada segunda no punto x_0 describe a curvatura da gráfica de $f(x)$ no punto:



$D^2f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava en x_1

$D^2f(x_2) = 0 \Rightarrow$ en x_2 hai un punto de inflexión

$D^2f(x_3) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa en x_3

- $D^2f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava en x_0
- $D^2f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ é convexa en x_0
- $D^2f(x_0) = 0 \Rightarrow$ en x_0 hai un *posible* punto de inflexión (tamén pode haber un extremo relativo).

Función derivada segunda: Se existe a **derivada segunda** de $f(x)$ en tódolos puntos do intervalo podemos definir a función derivada segunda como: $f''(x) = D^2f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Derivadas sucesivas

De xeito semellante á derivada segunda, podemos definir a derivada terceira de $f(x)$ en $x_0 \in (a,b)$ como a derivada en x_0 da función derivada segunda, $f''(x)$, e así sucesivamente.

As funcións elementais son, derivables tódalas veces que se queira, o que se coñece como ser *de clase infinita*.

Cálculo de funcións derivadas

Podemos atopar a función derivada dunha función dada a partir das derivadas das funcións elementais e utilizando as regras de derivación:

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
$a \cdot u$	$a \cdot u'$	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
$u+v$	$u'+v'$	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	A derivada dun produto é a derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	A derivada dun cociente é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado
$f(u)$	$f'(u) \cdot u'$	Regra da cadea

DERIVADAS ELEMENTAIS			
función	derivada	función	derivada
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	u^r	$R \cdot u^{r-1} \cdot u'$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\text{sen}(u)$	$[\cos(u)] \cdot u'$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\cos(u)$	$[-\text{sen}(u)] \cdot u'$
$\text{tg}(x)$	$1+\text{tg}^2(x)$	$\text{tg}(u)$	$[1+\text{tg}^2(u)] \cdot u'$
$\text{Ln}(x)$	$\frac{1}{x}$	$\text{Ln}(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \cdot u' = \frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$