

Exercicios resoltos

Exercicio 12.1: Dúas moedas están trucadas de xeito que a probabilidade de que saia cara é dobre ca da de que saia cruz. Un xogador gaña 10 € se saen caras e perde 5 € se non saen. Considera a variable aleatoria discreta que representa as ganancias do xogador.

- Constrúe a función de masa de probabilidade desa variable.
- Calcula a esperanza desa variable e explica o seu significado.

Imos expoñer todos os resultados que poden darse:

- Saír dúas caras, CC, con $P(2C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- Saír unha cara, C+ ou +C, con $P(1C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- Saír dúas cruces, ++, con $P(0C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Comprobamos que, entre todos, a probabilidade é 1 ($\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$)

A esperanza matemática será: $\bar{x} = \sum_i x_i \cdot p_i = 10 \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} - 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{35}{9}$

Exercicio 12.2: Nunha caixa hai o mesmo número de caramelos que de bombóns. Se un neno colle seis doces da caixa

- ¿Cal é a probabilidade de que collese alomenos dous bombóns?
- ¿E cal a de que collese non menos de dous nin máis de catro?

Solución:

a) Sexa X o número de bombóns. É unha variable aleatoria binomial de parámetros $n=6$ e $p=0,5$. Polo tanto:

$$\Pr\{X \geq 2\} = 1 - \Pr\{X < 2\} = 1 - (\Pr\{X = 0\} + \Pr\{X = 1\})$$

Buscando nas táboas:

$$\left. \begin{array}{l} \Pr\{X = 0\} = 0.0156 \\ \Pr\{X = 1\} = 0.0938 \end{array} \right\} \rightarrow \Pr\{X \geq 2\} = 1 - 0.1094 = 0.8906$$

b) Escribimos a probabilidade que se pide en termos da función de masa de probabilidade:

$$\Pr\{2 \leq X \leq 4\} = \Pr\{X = 2\} + \Pr\{X = 3\} + \Pr\{X = 4\} =$$

nas táboas $\rightarrow 0.2344 + 0.3125 + 0.2344 = 0.7813$

Exercicio 12.3: Unha empresa instala 20000 bombillas. A duración dunha bombilla segue unha distribución normal de media 305 días e desviación típica 40.

- a) ¿Cantas bombillas se espera que se fundan antes de 365 días?
b) ¿Cantas durarán máis de 401?

Solución:

a) Para poder usar as táboas da normal debemos tipificar as variables:

$$\left. \begin{array}{l} X \in N(305, 40) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \Pr\{X \leq 365\} = \Pr\left\{Z \leq \frac{365 - 305}{40}\right\} = \Pr\{Z \leq 1.5\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nas} \\ \text{táboas}}}{F(1.5)} = 0.9332$$

O número de bombillas fundidas antes de un ano será: $20000 \cdot 0.9332 = 18664$

b) Novamente debemos tipificar a variable e escribir a probabilidade buscada en termos da función de distribución:

$$\left. \begin{array}{l} X \in N(305, 40) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \Pr\{X \geq 401\} = \Pr\left\{Z \geq \frac{401 - 305}{40}\right\} = \Pr\{Z \geq 2.4\}$$

$$\Pr\{Z \geq 2.4\} = 1 - F(2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$$

O número de bombillas que durarán máis de 401 días é: $20000 \cdot 0.0082 = 164$

Exercicio 12.4: A puntuación media das notas das probas de acceso é 5.5 e a desviación típica 0.5. Supoñendo que a distribución das notas segue unha normal, pídese:

- a) ¿Que porcentaxe de alumnos superan o 5?
b) ¿Para que valor da desviación típica o 40% dos alumnos superaría o 6, supoñendo que a media fora a mesma?

Solución:

Sexa X a variable aleatoria que representa a nota nas probas de selectividade.

a) Para responder as cuestións do problema é necesario utiliza-las táboas da $N(0, 1)$, polo que se necesita **tipifica-la** variable.

$$\left. \begin{array}{l} X \in N(5.5, 0.5) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \Pr\{X > 5\} = 1 - \Pr\{X \leq 5\} = 1 - \Pr\left\{Z \leq \frac{5 - 5.5}{0.5}\right\} = 1 - \Pr\{Z \leq -1\} = 1 - F(-1)$$

Nas táboas de $F(x)$ non aparecen os correspondentes a valores de x negativos, polo que debemos ter en conta a simetría de $F(x)$ para calcular $F(-1)$: $F(-1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$$\Pr\{X > 5\} = 1 - F(-1) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \xrightarrow{\%} 100 \cdot 0.8413 = 84.13\%$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} X \in N(5.5, \sigma) \\ \Pr\{X > 6\} = 0.4 \end{array} \right\} \Pr\{X > 6\} = \Pr\left\{Z > \frac{6 - 5.5}{\sigma}\right\} = 1 - F\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.4 \rightarrow F\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.6$$

Nas táboas vemos que o valor 0.6 corresponde a $x = 0.25$. Temos: $\frac{0.5}{\sigma} = 0.25 \rightarrow \sigma = \frac{0.5}{0.25} = 2$

Exercicio 12.5: Nun país o 45% dos votantes fano a favor dun determinado partido político. Calcula-la probabilidade de que de 160 votantes máis da metade opten por ese partido.

Solución:

Sexa X a variable que nos indica o número de votantes dese partido, X será unha variable aleatoria cunha distribución binomial de parámetros $p=0.45$ e $n=160$.

Cando $n \cdot p$ e $n \cdot (1-p)$ son superiores a 4, coma neste caso, podemos aproximar a distribución binomial pola normal coa mesma media e desviación típica.

$$X \in B(160, 0.45) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 160 \cdot 0.45 = 72 \\ \sigma = \sqrt{160 \cdot 0.45 \cdot (1 - 0.45)} = 6.293 \end{cases}$$

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} X \in B(160, 0.45) \\ Y \in N(72, 6.293) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \Pr\{X > 80\} = 1 - \Pr\{X \leq 80\} \approx 1 - \Pr\{Y \leq 80\} = 1 - \Pr\left\{Z \leq \frac{80 - 72}{6.293}\right\} = 1 - F(1.27) = 1 - 0.8982 = 0.1018$$

Exercicio 12.6: Varios test de intelixencia deron unha puntuación que segue unha lei normal con media 100 e desviación 15.

- Determina a porcentaxe de poboación que obtería un coeficiente entre 95 e 110.
- ¿Que intervalo centrado en 100 contén ó 50% da poboación?
- Nunha poboación de 2500 individuos ¿cantos individuos se espera que teñan un coeficiente superior a 125?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{array}{l} X \in N(100, 15) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \Pr\{95 \leq X \leq 110\} &= \Pr\left\{\frac{95 - 100}{15} \leq Z \leq \frac{110 - 100}{15}\right\} = F(0.67) - F(-0.33) \\ &= F(0.67) - (1 - F(0.33)) = 0.7486 - 1 + 0.6293 = 0.3779 \end{aligned}$$

- b) Queremos calcular x tal que: $\Pr\{-x \leq X \leq x\} = 0.5$

Se temos en conta que a distribución normal é simétrica, resulta máis doado:

$$\Pr\{X \leq x\} = 0.75 \rightarrow \Pr\left\{Z \leq \frac{x - 100}{15}\right\} = 0.75 \rightarrow F\left(\frac{x - 100}{15}\right) = 0.75$$

O valor no que a función de distribución vale 0.75 é 0.7734, polo tanto:

$$\frac{x - 100}{15} = 0.7734 \rightarrow x = 0.7734 \cdot 15 + 100 = 111.601$$

- c) Calculamos, en primeiro lugar, a probabilidade de ter un CI superior a 125:

$$\Pr\{X \geq 125\} = \Pr\left\{Z \geq \frac{125 - 100}{15}\right\} = 1 - \Pr\left\{Z \leq \frac{125 - 100}{15}\right\} = 1 - F(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

O número de individuos será: $0.0475 \cdot 2500 = 118.75$

Exercicio 12.7: A porcentaxe de españois con estudos superiores é do 35%. Elexindo oito ó chou, calcula a probabilidade de que entre 3 e 5 (ámbolos dous incluídos) teñan estudos superiores, aplicando:

- Distribución binomial.
- Aproximación pola normal da binomial.

Solución:

a) Sexa a variable aleatoria X que indica o número de persoas con estudos medios do grupo de oito, X é unha variable aleatoria **binomial** de parámetros $n=8$ e $p=0.35$

$$\Pr\{3 \leq X \leq 5\} = \Pr\{X = 3\} + \Pr\{X = 4\} + \Pr\{X = 5\} =$$

↓

consultando a táboa da $B(8,0.35)$

↓

$$= 0.2188 + 0.2734 + 0.2188 = 0.7110$$

b) Como xa se comentou noutro problema, para valores de n e valores de p próximos ó 0.5 (noutras circunstancias a aproximación non é boa) podemos aproxima-la binomial pola normal coa mesma media e desviación tendo sempre en conta claro que a binomial é discreta (só toma valores enteiros) e a normal é continua (toma calquera valor).

Calculemo-la media e a desviación de X :

$$\left. \begin{array}{l} X \in B(n,p) \\ \bar{x} = n \cdot p \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{array} \right\} \text{ Polo tanto } \begin{array}{l} \bar{x} = 8 \times 0.35 = 2.8 \\ \sigma = \sqrt{8 \times 0.35 \times 0.65} = 1.3491 \end{array}$$

Sexa pois $Y \in N(2.8, 1.3491)$

$$\begin{aligned} \Pr\{3 \leq X \leq 5\} &\approx \Pr\{2.5 < Y \leq 5.5\} \rightarrow \text{tipificando} \\ \rightarrow \Pr\left\{ \frac{2.5 - 2.8}{1.3491} < Z \leq \frac{5.5 - 2.8}{1.3491} \right\} &= F(2.001) - F(-0.2224) \end{aligned}$$

Xa soamente queda ir ás táboas da normal:

$$\left. \begin{array}{l} F(2.001) = 0.9772 \\ F(-0.2224) = 1 - F(0.2224) = 1 - 0.5871 = 0.4129 \end{array} \right\}$$

$$\Pr\{3 \leq X \leq 5\} \approx 0.9772 - 0.4129 = 0.5643$$

Exercicio 12.7: Unha persoa viaxa diariamente da súa casa á oficina e o tempo que emprega segue unha distribución normal de media 35.5 minutos e unha desviación típica de 3.1 minutos. Se sae da súa casa tódolos días ás 8:20 e debe estar ás 9:00 ¿Cantos días do ano é de esperar que chegue tarde supoñendo que fai 240 viaxes anuais?

Solución: Para chegar tarde ten que tardar máis de 40 min. Sexa X a variable aleatoria que describe o tempo que tarda.

$$\left. \begin{array}{l} X \in N(35.5; 3.1) \\ Z \in N(0, 1) \end{array} \right\} \Pr\{X > 40\} = 1 - \Pr\{X \leq 40\} = 1 - \Pr\left\{Z \leq \frac{40 - 35.5}{3.1}\right\} = 1 - F(1.45) = 1 - 0.9265 = 0.0735$$

Nota: o valor de $F(1.45)$ búscase na táboa da normal.

Núm. esperado retrasos = $240 \times 0.0735 = 17.64$