

Exercicios resoltos

Exercicio 11.1: Un dos problemas que lle propuxeron a Pascal foi o seguinte: Un xogador aposta que en 8 lanzamentos consecutivos dun dado saca, polo menos, un 1. Despois de lanzar 3 veces sen obter o 1, o xogo interrómpese. ¿Que parte da aposta se lle debe devolver?

En problemas de azar, con frecuencia a maior dificultade está en darlle xeito ao enunciado. Intentámolo, a ver:

i) Primeiro pensemos que o xogo se realiza normalmente. Lanza 8 veces o dado e gaña se lle sae unha vez o 1, ou se lle sae 2 veces, ou 3, ou 4,... ou as 8 veces.

Cando temos un panorama moi extenso, pode que nos conveña ver o suceso contrario (que non saque ningún 1): $P(\text{ningunha vez o 1}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0'2325$

Logo: $P(\text{algunha vez o 1}) = 1 - P(\text{ningunha vez o 1}) = 1 - 0'2325 = 0'7675$

ii) Se xa tirou tres veces e non obtivo ningún 1, ten pendente un “minixogo” de cinco lanzamentos:

$$P(\text{ningunha vez o 1}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0'4$$

Logo: $P(\text{algunha vez o 1}) = 1 - P(\text{ningunha vez o 1}) = 1 - 0'4 = 0'6$

iii) Agora a discusión é máis social ca matemática: 0'6 é, aproximadamente, o 78% de 0'7675. Conserva, por tanto, un 78% das súas opcións. Quizais esa sexa a porcentaxe que decidiran devolverlle.

Exercicio 11.2: Discute a validez dos razoamentos utilizados polos xogadores de lotería primitiva que se mencionan no apartado 2 dos xeitos de definir a probabilidade.

“...algúns xogadores da lotería primitiva estudan cales son os seis números que saíron máis veces nos sorteos anteriores e cobren o boleto con eses números pois entenden que “é o que ten máis probabilidade de saír”.

O feito é que cada sorteo é independente dos anteriores e, a non ser que haxa algún tipo de nesgo (“trampa” voluntaria ou non), o que aconteceu antes non indica nada para a vez seguinte.

“...ninguén cobre un boleto cos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 porque pensa que é imposible que poda saír e, polo tanto, implicitamente estalle asignando 0 de probabilidade”.

O feito é que cada combinación concreta ten a mesma probabilidade que calquera outra. O que pasa é como hai moitísimas con números salteados, caen no erro de pensar que se colocan unha salteada é máis fácil. E non, sería máis fácil se has colocasen todas, pero custaríales unha barbaridade de euros.

Exercicio 11.3: Dunha bolsa na que hai 7 bolas brancas, 5 azuis e 3 verdes elíxense dúas bolas

- ¿Cal é a probabilidade de que as dúas sexan brancas?
- ¿Cal é a probabilidade de que polo menos unha sexa branca?

Solución: O problema pode resolverse mediante un esquema semellante ó do problema número 3 ou tamén utilizando a combinatoria. Nesta ocasión optaremos polo segundo método.

- Dado que tódalas bolas teñen as mesmas posibilidades de ser elixidas, podemos utiliza-las probabilidades de Laplace.
 - Casos posibles (xeitos de elixir 2 bolas entre 15): Na elección non poden repetirse (pode repetirse a cor, pero non a bola) e non se ten en conta a orde. Trátase de combinacións de 15 elementos elixidos de 2 en 2:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)! \cdot 2!} = 105$$

- Casos favorables (xeitos de elixir 2 bolas entre 7): $C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21$

$$P\{2 \text{ brancas}\} = \frac{21}{105}$$

- É máis doado polo complementario: Ningunha sexa branca.

$$P\{\text{polo menos unha branca}\} = 1 - P\{\text{ningunha branca}\} = 1 - \frac{C_{8,2}}{C_{15,2}} = 1 - \frac{28}{105} = \frac{77}{105}$$

Exercicio 11.4: Para comproba-la eficacia dunha vacina contra a gripe, faise un estudio cunha mostra de 700 persoas obtendo os resultados que aparecen na táboa.

	Collen a gripe	Non collen a gripe
Vacinados	135	365
Sen vacinar	84	116

- ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe?
- ¿Cal é a probabilidade de estar vacinado?
- ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe ou estar vacinado?
- ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe e estar vacinado?
- ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe estando vacinado?

Solución: O obxectivo deste problema é que aprendas a diferenciar entre as diferentes operacións con sucesos (unión, intersección, condicionado).

O experimento aleatorio é elixir ó chou unha persoa da mostra e, como a probabilidade de elixir a cada unha é a mesma, podemos utiliza-las probabilidades de Laplace:

$$\text{Probabilidade dun suceso} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Sexan os sucesos: $A=\{\text{colle-la gripe}\}$ e $B=\{\text{estar vacinado}\}$

$$\text{a) } \Pr(A) = \frac{135 + 84}{700} = \frac{219}{700}$$

$$\text{b) } \Pr(B) = \frac{135 + 365}{700} = \frac{500}{700}$$

$$\text{c) } \Pr\{\text{colle-la gripe ou estar vacinado}\} = \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \frac{219}{700} + \frac{500}{700} - \frac{135}{700} = \frac{584}{700}$$

$$\text{d) } \Pr\{\text{colle-la gripe e estar vacinado}\} = \Pr(A \cap B) = \frac{135}{700} \quad (\text{fíxate que a probabilidade da intersección non é o produto das probabilidades pois os sucesos non son independentes}).$$

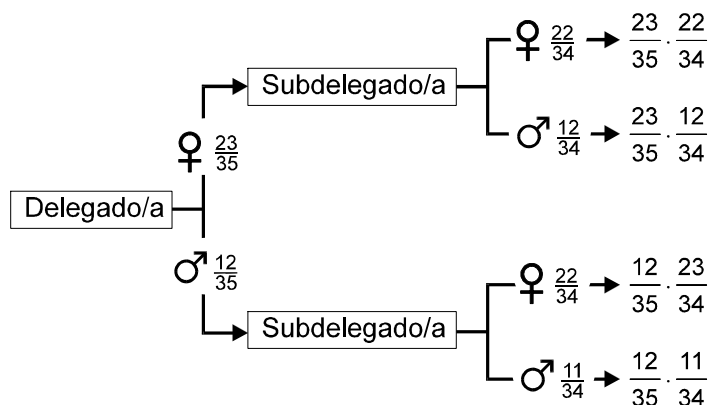
$$\text{e) } \Pr\{\text{colle-la gripe estando vacinado}\} = \Pr\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{135}{135 + 365} = \frac{135}{500} \quad (\text{agora trátase dunha probabilidade condicionada, fíxate que os casos totais só son os vacinados}).$$

Exercicio 11.5: Nunha clase hai 23 alumnas e 12 alumnos. Elíxese un delegado/a e subdelegado/a.

- Cal é a probabilidade de que sexan dúas mulleres?
- ¿Cal é a probabilidade de que sexan dous homes?
- ¿Cal é a probabilidade de que sexan home e muller?
- Se para o cargo de delegado foi elixida unha muller, ¿cal é a probabilidade de que o subdelegado sexa home?

Solución: Como todos e todas teñen as mesmas posibilidades de saír, podemos utiliza-las probabilidades de Laplace.

Para calcula-lo número dos casos favorables e dos casos posibles en cada apartado, podemos utiliza-la combinatoria ou construír un esquema da elección:



$$\text{a) } P\{\text{dú as mulleres}\} = \frac{23}{35} \cdot \frac{22}{34} = \frac{506}{1190}$$

$$\text{b) } P\{\text{dous homes}\} = \frac{12}{35} \cdot \frac{11}{34} = \frac{132}{1190}$$

c) Hai dous sucesos nos que son elixidos un home e unha muller, elixir unha deledada e un subdelegado e elixir un delegado e unha subdelegada, polo que a probabilidade pedida será a unión deses dous sucesos:

$$P\{\text{elixir un home e unha muller}\} = \frac{23}{35} \cdot \frac{12}{34} + \frac{12}{35} \cdot \frac{23}{34} = \frac{552}{1190}$$

d) Temos que calcular unha probabilidade condicionada: $P\left(\frac{\{\text{sub. home}\}}{\{\text{del. muller}\}}\right)$

Fíxate que hai dúas polas do esquema nas que o delegado é unha muller.

$$P\left(\frac{\{\text{sub. home}\}}{\{\text{del. muller}\}}\right) = \frac{P(\{\text{sub. home}\} \cap \{\text{del. muller}\})}{P\{\text{del. muller}\}} = \frac{\frac{23}{35} \cdot \frac{12}{34}}{\frac{23}{35} \cdot \frac{22}{34} + \frac{12}{35} \cdot \frac{12}{34}} = \frac{276}{782}$$

Exercicio 11.6: Nun certo modelo de automóbil comprobouse que, antes dos 50 000 km, un 28% sofren algunha avería no sistema eléctrico e un 12% fano no sistema mecánico.

- ¿Cal é a probabilidade de que un coche sufra os dous tipos de avería?
- ¿Cal é a probabilidade de que un coche non ningunha desas averías antes dos 50 000 km?

Solución: Para poder resposta-las preguntas é necesario saber se os dous tipos de averías son ou non independentes. De non ser independentes, teriamos que coñecer como influe o ter unha das averías na probabilidade de te-la outra. Como non dispoñemos deste último dato suporemos, neste problema, que se producen de xeito independente.

- Sexa $A=\{\text{sufrir unha avería eléctrica}\}$ e $B=\{\text{sufrir unha avería mecánica}\}$, temos que calcula-la probabilidade da intersección (o ser independentes, é o produto das probabilidades): $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) = 0'28 \cdot 0'12 = 0'0336$
- Un recurso habitual para calcula-la probabilidade dun suceso é utiliza-lo suceso complementario cando é máis simple co orixinal. O complementario de non avariarse é sufrir algunha avería, é dicir $A \cup B$:

$$\Pr\{\text{non avariarse}\} = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - [\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)] = 1 - (0'28 + 0'12 - 0'0336) = 0'6336$$

Exercicio 11.7: Faise un estudio comparativo do funcionamento de 3 modelos de ordenadores durante 10.000 horas. O 20% dos do 1º modelo, o 35% do 2º e un 15% do 3º sufriron algún fallo. Se utilizamos 50 ordenadores do 1º modelo, 20 do 2º e 40 do 3º

- ¿Cal é a probabilidade de que falle un ordenador?
- ¿Se un ordenador fallou, cal é a probabilidade de que fose do 1º modelo?

Solución:

- Este é un caso típico de aplicación da fórmula das probabilidades totais:
 - $A_1=\{\text{ser do modelo 1}\}$, $A_2=\{\text{ser do modelo 2}\}$, $A_3=\{\text{ser do modelo 3}\}$
 - $B=\{\text{averiarse}\}$

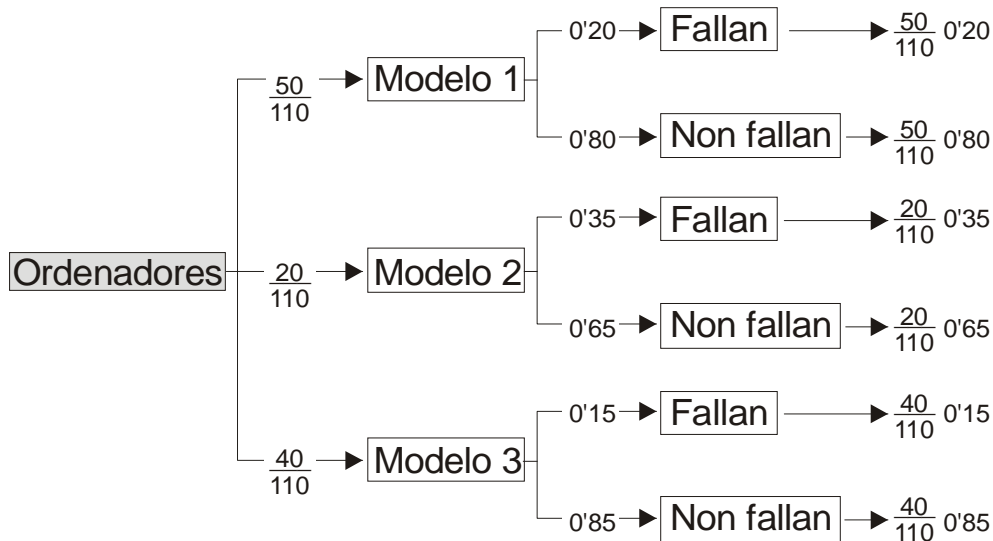
$$\Pr(B) = \sum_i \Pr\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot \Pr(A_i) = 0'2 \cdot \frac{50}{110} + 0'35 \cdot \frac{20}{110} + 0'15 \cdot \frac{40}{110} = \frac{23}{110} = 0'209$$

b) Agora é un caso típico da aplicación da fórmula de Bayes (xa non forma parte do temario):

- $A_1 = \{\text{ser do modelo 1}\}$, $A_2 = \{\text{ser do modelo 2}\}$, $A_3 = \{\text{ser do modelo 3}\}$
- $B = \{\text{averiarse}\}$

$$\Pr(A_1|B) = \frac{\Pr(B|A_1) \cdot \Pr(A_1)}{\sum_i \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)} = \frac{0'2 \cdot \frac{50}{110}}{0'2 \cdot \frac{50}{110} + 0'35 \cdot \frac{20}{110} + 0'15 \cdot \frac{40}{110}} = \frac{10}{23}$$

O problema tamén pode abordarse sen utilizar Bayes cun diagrama de árbore:



$$a) \Pr(B) = 0'2 \cdot \frac{50}{110} + 0'35 \cdot \frac{20}{110} + 0'15 \cdot \frac{40}{110}$$

$$b) \Pr(A_1|B) = \frac{0'2 \cdot \frac{50}{110}}{0'2 \cdot \frac{50}{110} + 0'35 \cdot \frac{20}{110} + 0'15 \cdot \frac{40}{110}}$$

Exercicio 11.8: Unha bolsa contén 4 bolas bermellas e 5 verdes e outra 6 bolas bermellas e 3 verdes.

- Se eleximos unha bola ó chou, ¿cal é a probabilidade de que sexa bermella?
- Se a bola elexida foi verde, ¿cal é a probabilidade de que fose da primeira bolsa?
- Eleximos dúas bolas, unha de cada bolsa, ¿Cal é a probabilidade de que as dúas teñan a mesma cor?

Solución: Suporemos que a probabilidade de elixir cada bolsa é a mesma, $0'5$.

a) É un exemplo típico de aplicación da fórmula das probabilidades totais:

- A_1 : elixi-la bolsa 1. $P(A_1)=0'5$
- A_2 : elixi-la bolsa 2. $P(A_2)=0'5$
- B : elixir unha bola bermella.

$$P(B) = P\left(\frac{B}{A_1}\right) \cdot P(A_1) + P\left(\frac{B}{A_2}\right) \cdot P(A_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{18}$$

b) Agora temos un caso de aplicación da fórmula de Bayes:

$$P(A_1/V) = \frac{P(V/A_1) \cdot P(A_1)}{P(V/A_1) \cdot P(A_1) + P(V/A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{8}$$

c) Temos dúas posibilidades, que as dúas sexan verdes ou que as dúas sexan bermellas.

Podemos considera-la elección das dúas bolas como un experimento composto de dous experimentos: Elexir unha bola da bolsa 1 e elexir unha bola da bolsa 2.

Dado que os resultados dun non inflúen nos do outro, son independentes. temos:

$$P\{\text{mesma cor}\} = P(\{2 \text{ verdes}\} \cup \{2 \text{ bermellas}\}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{33}{81}$$

Exercicio 11.9: Carme e Pedro lanzan unha pelota a un branco. A probabilidade de que Carme dea no branco é $1/3$ e a probabilidade de que dea Pedro é $1/4$. Supóñase que Carme lanza primeiro e que os dous rapaces vanse turnando para lanzar.

- Calcula a probabilidade de que o primeiro lanzamento que dea no branco sexa o 2º de Carme.
- ¿Cal é a probabilidade de que Carme dea no branco antes de que o faga Pedro?

Solución: Do enunciado despréndese que Carme é o primeiro en lanzar.
Supoñemos que cada lanzamento é independente dos demais.

- A: Carme acerta.
- \bar{A} : Carme erra.
- B: Pedro acerta.
- \bar{B} : Pedro erra.

a) Para que o primeiro en acertar sexa o 2º lanzamento de Carme, ten que falla-lo primeiro, Pedro falla-lo seu primeiro lanzamento e Carme acerta-lo segundo:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{36}$$

b) Carme é o primeiro se:

- Acerta a 1ª. $P(A) = \frac{1}{3}$
- Se acerta a 2ª e Pedro e el erran a 1ª. $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$
- Se acerta a 3ª e erran as anteriores:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

- Así sucesivamente

Para calcula-la probabilidade de que Carme acerte primeiro temos que sumar tódolos termos anteriores (unha serie infinita de sucesos):

$$P\{\text{Carme acerte antes}\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

Trátase da suma dunha progresión xeométrica de termo inicial $a_1 = \frac{1}{3}$ e de razón $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)$. Hai unha fórmula para calcula-la suma dos termos dunha progresión xeométrica:



$$\text{Suma} = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$