

Unidade 7: Cálculo diferencial

1. Variación dunha función.
2. Variación media: Taxa de variación.
 - 2.1. Concepto e interpretación física.
3. Variación instantánea: Derivada nun punto.
 - 3.1. Concepto e interpretación física.
 - 3.2. Interpretación gráfica.
4. Función derivada.
 - 4.1. Concepto e cálculo.
5. Aplicacións: Estudio do crecemento.

Introducción

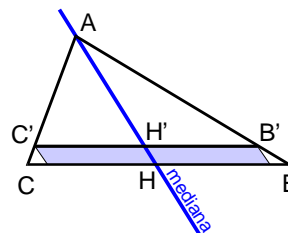
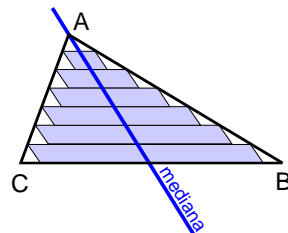
O centro de gravidade dun triángulo (baricentro)

Era un feito coñecido desde antigo é que o centro de gravidade dun triángulo atópase no punto de corte das medianas pero ¿cómo demostralo? Simón Stevin, un matemático dos Países Baixos do século XVI, fixo o seguinte razoamento:

- Recubrimos o triángulo con paralelogramos con dous lados paralelos a base do triángulo e os outros dous paralelos á mediana.
- A mediana divide en dúas partes iguais a cada un dos paralelogramos. Demostrámolo para o $CC'B'B$ (basta demostrar que a mediana divide o lado $C'B'$ en dúas metades):

Por semellanza de triángulos

$$\left. \begin{array}{l} AHB \approx AH'B' \Rightarrow \frac{AH}{AH'} = \frac{BH}{B'H'} \\ AHC \approx AH'C' \Rightarrow \frac{AH}{AH'} = \frac{CH}{C'H'} \end{array} \right\} \frac{BH}{B'H'} = \frac{CH}{C'H'} \xrightarrow{CH=BH} C'H = B'H$$



- A figura formada polos paralelogramos é simétrica en relación á mediana do triángulo e, tal como establecera Arquímedes, o centro de gravidade dunha figura simétrica en relación a un eixe atópase sobre ese eixe. Polo tanto, o centro de gravidade dos paralelogramos está na mediana.
- Aumentando o número de paralelogramos ata o infinito, a altura de cada paralelogramo será case 0, será infinitesimal, e os paralelogramos cubrirán todo o triángulo. A mediana seguirá sendo un eixe de simetría deses paralelogramos e, polo tanto, do triángulo.
- Repetindo o razoamento para as outras medianas obtemos que o baricentro, punto de corte das medianas, é o centro de gravidade.

O Cálculo infinitesimal

O método anterior, baseado na utilización de obxectos *infinitamente pequenos*, é a esencia do **Cálculo Infinitesimal**. Xa os matemáticos gregos, en especial Eudoxo (408-355 a.p.), utilizaron métodos infinitesimais pero foron Newton e Leibnitz, un século despois de Stevin, os que dotaron ó Cálculo Infinitesimal da base lóxica necesaria para convertelo na máis potente ferramenta da Matemática.

Podemos dividir o Cálculo Infinitesimal en dúas polas: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral que trataremos na unidade 8.

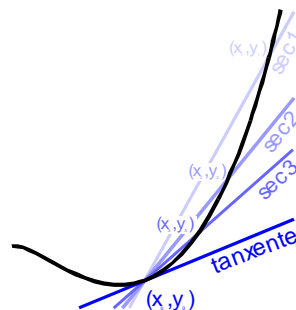
Cálculo diferencial

Xurde da resolución de dous problemas clásicos, *o trazado de tanxentes a curvas* e *o estudio da variación dunha función*. O método fundamental do Cálculo Diferencial é partir dunha aproximación e ir mellorandoa ata chegar a *escala infinitesimal*.

Exemplo: Queremos trazar unha tanxente a unha curva no punto (x_0, y_0) pero para determinar unha recta necesitamos dous puntos e só temos un.

Podemos elixir outro punto (x_1, y_1) e trazar a secante que pase por (x_0, y_0) e por ese outro punto. Non é a tanxente buscada pero, se o segundo punto está próximo a (x_0, y_0) , a secante aproxima á tanxente.

Se aproximamos infinitamente o segundo punto a (x_0, y_0) , a secante converterase na tanxente buscada (intuitivamente, podemos considerar á tanxente como unha secante entre dous puntos infinitamente próximos).



Cálculo Integral

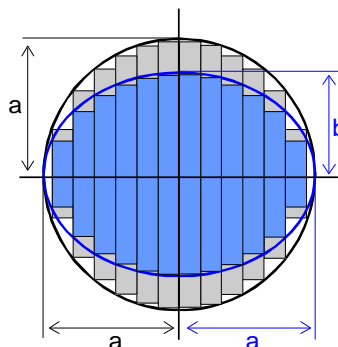
É o enfoque inverso do Cálculo Diferencial, parte do infinitamente pequeno para acadar o macroscópico. Por exemplo, para calcular unha área, divídese en infinitos anaquiños infinitesimais para logo sumalos e obter a área buscada.

Exemplo: Kepler ideou o seguinte método, baseado nos procedementos de Stevin, para calcular da área da elipse de semieixes a e b .

Non dispoñemos dunha fórmula, pero podemos encher a elipse con rectángulos e obter unha aproximación desa área.

Aumentando o número de rectángulos ata o infinito, a base de cada rectángulo queda reducida case a un punto e o rectángulo a unha liña. A área total dos rectángulos infinitesimais coincide ca da elipse.

Facemos o mesmo coa circunferencia radio a , os rectángulos infinitesimais da elipse e da circunferencia terán a mesma base pero a altura dos da elipse obtense multiplicando por b/a , a razón entre os semieixes, a altura dos correspondentes da circunferencia. (é como se obtivésemos a elipse aplastando en vertical a circunferencia, pasando o semieixe de medir a a b).



A área do círculo é a suma da área dos rectángulos infinitesimais correspondentes á circunferencia:

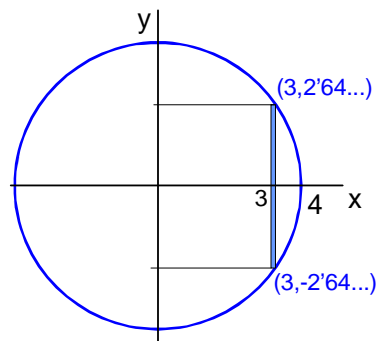
$$\text{Área círculo} = r_1 + r_2 + r_3 + \dots = \pi \cdot a^2$$

Multiplicando por $\frac{3}{4}$ a área de cada un deses rectángulos obteremos a área do correspondente rectángulo da elipse e, polo tanto, a área da elipse será a suma:

$$A = \frac{b}{a}r_1 + \frac{b}{a}r_2 + \frac{b}{a}r_3 + \dots = \frac{b}{a}(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = \frac{b}{a}(\pi \cdot a^2) = \pi \cdot a \cdot b$$

Actividade 7.1: Fíxate que ó ser cada rectángulo infinitesimal coma unha liña, podemos calcular a súa altura a partir das coordenadas dos puntos da curva que limitan a liña.

Comproba que a altura dos rectángulos infinitesimais da elipse de centro na orixe e semieixes 4 e 3 é $\frac{3}{4}$ da altura do rectángulo correspondente da circunferencia de centro na orixe e radio 4.



$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

$$x = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{16 - 3^2} = \pm 2.6457\dots$$

Cálculo Diferencial

Variación dunha función

Cando se estudia un fenómeno físico buscamos describir o que xa aconteceu coa intención de predicir, alomenos con aproximacións, o que vai acontecer. Queremos ser capaces de predicir cal vai ser o comportamento futuro dese fenómeno.

Para poder facer prediccións é imprescindible saber se o proceso é *continuo*, se pequenas variacións nas condicións producen variacións pequenas no estado do proceso, e tamén necesitamos medir como vai variando o proceso.

Exemplo: A seguinte táboa describe o nivel dun río en diferentes intres durante unha enchente. Sabemos que o río desbordase ó chegar ós 6 metros ¿É previsible que se desborde nas próximas 2 horas?

t Tempo (en horas)	0	2	3	3'5	4
N(t) Nivel (en metros)	2	4	4'7	4'9	5'1

Solución: Sabemos que o valor en 4 é 5'1 e que na media hora anterior, entre 3'5 e 4, o valor aumentou 0'2 m, de 4'9 a 5'1, o que supón un ritmo de aumento de: $\frac{0'2}{0'5} = 0'4 \text{ m/hora}$

En 2 horas podemos esperar un aumento de 0'8 m e que acade un nivel de $5'1 + 0'8 = 5'9$ m. co cal, vemos que se sitúa moi preto de 6 m, o que nos indica que debemos toma-las medidas de precaución convenientes.

Fíxate que para calcular o ritmo de variación por unidade de tempo fixemos as seguintes operacións:

$$\frac{N(4) - N(3'5)}{4 - 3'5} = \frac{5'1 - 4'9}{4 - 3'5} = \frac{0'2}{0'5} = 0'4 \text{ m/hora}$$

Por outra banda, en moitas ocasións, a variación da función é unha magnitude que ten sentido por si mesma e que debemos estudar para entender o fenómeno que describe a función.

Exemplo: O espacio percorrido por un móbil ven dado pola función: $s(t) = 5t^2$ t en segundos e s(t) en metros.
¿Que tipo de movemento leva o móbil? ¿Qué velocidade leva ós 5 segundos?

Solución: Para descubrir de que tipo de movemento se trata, debemos estudar se a velocidade do móbil é constante (movemento uniforme) ou non (movemento variado).

Podemos medir a velocidade de dous xeitos diferentes:

Velocidade media: É o espacio percorrido dividido polo tempo.

A velocidade media do móbil do problema entre, por exemplo, $t=1$ e $t=4$ é o espacio percorrido nese tempo, $s(4)-s(1)$ dividido polo tempo transcorrido, $4-1$:

$$VM_{[1,4]} = \frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{4 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

Analogamente, a velocidade media entre $t=4$ e $t=4'5$ será:

$$VM_{[4,4'5]} = \frac{5 \cdot 4'5^2 - 5 \cdot 4^2}{4'5 - 4} = 42'5 \text{ m/s}$$

Xa sabemos que o movemento é variado. Para determinar á súa vez se esa variación de velocidade se produce con ritmo constante (uniformemente variado), necesitamos a velocidade instantánea.

Velocidade instantánea: Velocidade que leva un móbil nun intre dado.

A velocidade instantánea non pode calcularse directamente, pero pode aproximarse mediante velocidades medias en intervalos cada vez máis pequenos. En $t=1$:

$$VM_{[1,2]} = \frac{5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1^2}{2 - 1} = 15 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1'5]} = \frac{5 \cdot 1'5^2 - 5 \cdot 1^2}{1'5 - 1} = 12'5 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1'1]} = \frac{5 \cdot 1'1^2 - 5 \cdot 1^2}{1'1 - 1} = 10'5 \text{ m/s}$$

$$VM_{[1,1'01]} = \frac{5 \cdot 1'01^2 - 5 \cdot 1^2}{1'01 - 1} = 10'05 \text{ m/s}$$

A velocidade instantánea será o límite desas velocidades medias:

$$v(1) = \lim_{x \rightarrow 1} VM_{[1,x]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = 10 \text{ m/s}$$

De xeito semellante podemos calcular as velocidades instantáneas en $t=2$ (20 m/s), $t=3$ (30 m/s) ...

A velocidade instantánea varia uniformemente, cada segundo aumenta 10 m/s, é un movemento uniformemente variado. o que nos permite predicir que ós 5 segundos terá unha velocidade de 50 m/s.

Taxa de variación media

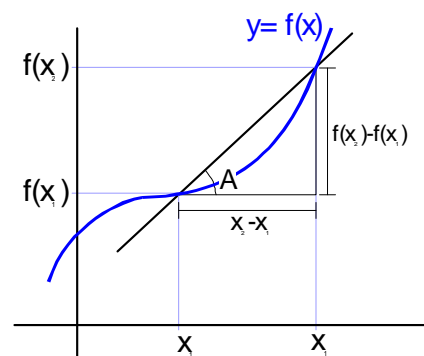
É unha medida da variación media dunha función nun intervalo. Indica canto varía a función, de media, por cada unidade que varie a variable independente.

Calcúlase dividindo a variación da función no intervalo pola variación da x (tamén se lle chama cociente incremental):

A taxa de variación da función $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ é:

$$TVM_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

As unidades en que se expresa a taxa de variación son as unidades de $f(x)$ divididas polas unidades de x .



A taxa de variación é a tanxente do ángulo A e, polo tanto, a pendente da recta secante á gráfica nos puntos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Exercicio 7.1: A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0'1 \cdot t + 120$, onde t é a temperatura en $^{\circ}\text{C}$ e $l(t)$ a medida da barra en cm.

¿Calcular a variación media da lonxitude da barra entre $t=10^{\circ}\text{C}$ e $t=40^{\circ}\text{C}$? ¿Que representa fisicamente esa variación?

Taxa de variación instantánea ou derivada

O mesmo que sucede coa velocidade instantánea dun móbil, que non se pode calcular directamente cos datos obtidos a partir da ecuación do movemento, tampouco podemos calcular directamente a taxa de variación instantánea dunha función $f(x)$ nun punto x_0 .

O que si podemos é aproximar esa variación mediante a variación media nun intervalo con ese punto nun extremo:

$$\text{TVM}_{(x_0)} \approx \text{TVM}_{[x_0, x]} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo que x se aproxime a x_0 , a taxa de variación media irase aproximando a taxa de variación instantánea.

Definimos a taxa de variación instantánea como o límite das taxas de variación medias cando x tende a x_0 :

$$\text{TVM}_{(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{TVM}_{[x_0, x]}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A taxa de variación instantánea tamén se lle chama derivada da función no punto; escríbese $f'(x_0)$ (derivada de f en x_0).

Exemplo: Calcula a velocidade instantánea dun corpo en caída libre 2 segundos despois de empezar a caer.

A ecuación do movemento dun obxecto en caída libre, desprezando o rozamento, é: $s(t) = 4'9 \cdot t^2$ t en segundos, $s(t)$ en metros.

Solución: A velocidade instantánea é a taxa de variación instantánea da función que representa o espacio segundo o tempo:

$$\text{TVM}_{(2)} = s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4'9t^2 - 4'9 \cdot 2^2}{t - 2} = \frac{0}{0}$$

Ese límite é indeterminado da forma $0/0$, para calculalo é necesario simplificar a fracción:

$$s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4'9 \cdot (t^2 - 4)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4'9 \cdot (t - 2) \cdot (t + 2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} [4'9 \cdot (t + 2)] = 19'6 \text{ m/s}$$

Facendo o cambio $h=x-x_0$ obtemos unha nova expresión para a derivada que en ocasións é máis doada de manexar:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

No exemplo anterior: Utilizando a segunda expresión da derivada o proceso é similar (en lugar de facer unha descomposición dun polinomio debemos elevar ó cadrado un binomio):

$$\begin{aligned} s'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot (2+h)^2 - 4'9 \cdot 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot (4 + 4h + h^2) - 4'9 \cdot 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot 4h + 4'9 \cdot h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4'9 \cdot h \cdot (4 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [4'9 \cdot (4 + h)] = 4'9 \cdot 4 = 19'6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Pero os límites non teñen por que existir sempre, por iso diremos que unha función é derivable nun punto cando ten derivada nese punto. Se ten derivada en tódolos puntos dun intervalo diremos que é derivable nese intervalo.

Exercicio 7.2: a velocidade dun móbil ven dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t , tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s).

Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.

Función derivada

En ocasións é necesario calcular a derivada dunha función en varios puntos, o que pode resultar moi laborioso pois supón calcular outros tantos límites.

Exemplo: A ecuación do movemento dun móbil é: $s(t) = 2t^2$. Queremos estudar se o movemento dese obxecto é uniformemente variado.

Solución: Temos que calcular a velocidade instantánea do móbil (a derivada) en varios intres e comprobar se vai variando de xeito uniforme:

$$\begin{aligned} s'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(0+h)^2 - 2 \cdot 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0 \\ s'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 1^2 + 4h + 2h^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (4 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4 \\ s'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 2 \cdot 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (8 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8 \end{aligned}$$

A velocidade varia de xeito uniforme polo que o movemento é uniformemente variado.

Fixándonos neses valores resulta doado decatarse de que se obteñen multiplicando o punto por 4. Hai unha fórmula que nos permite calcular a derivada de $s(t)$ nun punto t calquera: $s'(t) = 4t$

Un xeito de simplificar ese traballo é atopar a fórmula que a cada punto lle asigna a derivada da función nese punto.

Esa fórmula corresponde a unha función que recibe o nome de función derivada de $f(x)$: $f'(x)$

Exemplo: No exemplo anterior, podemos calcular directamente a fórmula da función derivada:

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(t+h)^2 - 2t^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2t^2 + 4th + 2h^2 - 2t^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4th + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (4t + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4t + 2h) = 4t$$

Moitas funcións poden considerarse como combinacións doutras máis sinxelas ($f(x)=3x^5-x^2+5$ sería suma de $3x^5$, $-x^2$ e 5 e a súa vez $3x^5$ sería o produto de 3 e x^5).

O que pretendemos é chegar a coñecer a función derivada dunha función calquera a partir das derivadas das funcións simples que a conforman.

DERIVADAS ELEMENTAIS		
función	derivada	regra
a (constante)	0	A derivada dunha constante é 0
x	1	A derivada da función identidade é a función constante 1
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	Para derivar x elevado a r multiplícase por r a redúcese o expoñente nunha unidade.

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
$a \cdot u$	$a \cdot u'$	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
$u+v$	$u'+v'$	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	A derivada dun produto: Derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	A derivada dun cociente: Derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado

Exercicio 7.3: Demostra que a función derivada de $f(x)=x^3$ é $f'(x)=3x^2$

Exercicio 7.4: Demostra que a derivada dunha función constante é 0.

Exercicio 7.5: Demostra que a derivada da función identidade, $f(x)=x$, é 1.

Derivada segunda

Ó derivar unha función $f(x)$ obtemos unha nova función, a función derivada $f'(x)$. Esta nova función pode a súa vez derivarse e a función obtida recibe o nome de derivada segunda de $f(x)$: $(f'(x))'=f''(x)$.

Exercicio 7.6: O espazo percorrido por un móbil ven dado pola función $s(t)=9-t^2$, t o tempo en segundos e $s(t)$ o espazo en m. Atopa a fórmula da función que describe a súa aceleración instantánea. ¿É un movemento uniformemente variado?

Interpretación gráfica da derivada

A derivada dunha función nun punto (taxa de variación instantánea) é unha medida de como varía a función nese punto.

É de esperar, polo tanto, que a derivada nun punto reflicte algunha característica da gráfica da función nese punto.

Exemplo: Dada a función $f(x)=-x^2+4x$

Debuxa a súa gráfica, calcula as derivadas en $x=1$, $x=2$ e $x=4$ e relaciona os valores obtidos coa gráfica da función neses puntos.

Solución: Por ser de grao 2, a gráfica é unha parábola. Representámola despois de calcular o vértice e dar algúns valores.

Calculamos a función derivada: $f'(x)=-2x+4$

$$f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$$

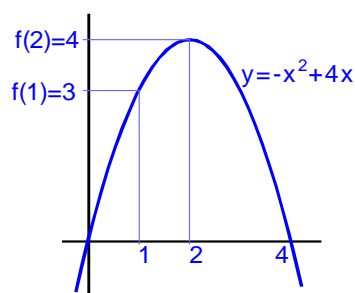
$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0$$

$$f'(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -4$$

Relacionándoos coa gráfica vemos:

- En $x=1$ a función é crecente e a derivada é positiva. É coherente, pois a derivada indica a variación.
- En $x=4$ a función decrece e ten máis inclinación que en $x=1$. A derivada é negativa e en valor absoluto é maior que en $x=1$, o que tamén resulta coherente.
- En $x=2$ a función ten un máximo e pasa de crecer a decrecer. A derivada é 0. Entre + e - só témo-lo 0.

Comprobamos que a derivada nun punto mide a inclinación da gráfica da función nese punto.



Para comprobar se efectivamente a derivada nun punto mide a inclinación da gráfica da función nese punto, estudiamos se existe algunha relación entre a derivada e a recta tanxente a gráfica nese punto (a inclinación da tanxente é a inclinación da gráfica).

A recta tanxente a gráfica dunha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ non pode calcularse directamente pois para determinar unha recta necesitamos dous puntos, pero só temos un.

Eliximos un valor x_1 próximo a x_0 e aproximamos a tanxente en pola secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e que

$$\text{ten de ecuación: } \sec_1 \equiv y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$\text{Fixémonos na pendente desa recta: } m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Para melloralala só temos que elixir puntos cada vez máis próximos ó punto de tanxencia.

A pendente da tanxente será o límite das pendentes das secantes cando facemos que x se aproxime *infinitamente* a x_0 :

$$m_{\text{tanx}} = \lim_{x \rightarrow x_0} (m_{\text{sec}}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función é igual á derivada da función nese punto.

A ecuación da **recta tanxente** a unha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ vén dada por: $y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$

Exercicio 7.7: atopa a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $y = \frac{1}{x}$ no punto de abscisa $x=2$

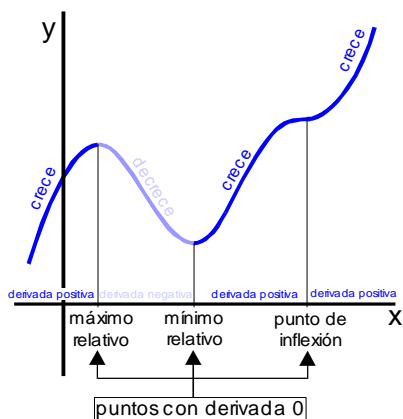
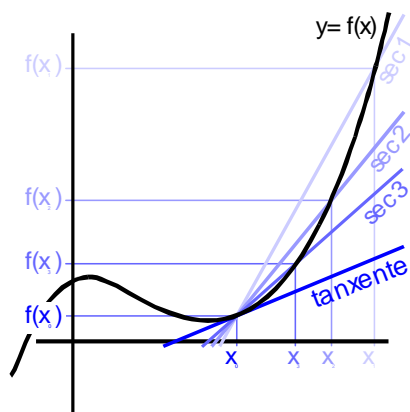
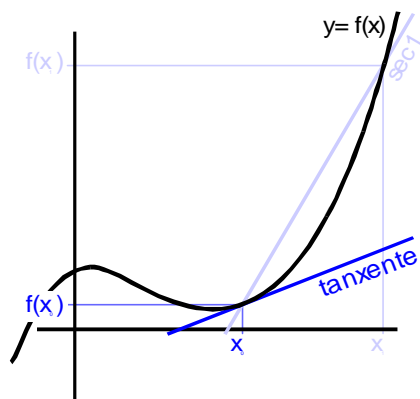
Derivadas e crecemento

Se a derivada dunha función nun punto é positiva indica que os valores da función van en aumento, logo a función é crecente nese punto.

Pola contra, se a derivada é negativa a función é decrecente.

Se a derivada é 0 significa que a inclinación da gráfica é 0 (gráfica horizontal) o que significa que o punto:

- É un máximo relativo da función.
- É un mínimo relativo.
- É unha caste especial de puntos de inflexión nos que a gráfica é "horizontal".



Estudiando o signo da derivada sabemos cando crece e decrece a función e podemos facernos unha primeira idea da forma da súa gráfica.

Exemplo: Representa graficamente a función:

$$f(x) = x^3 - 12x + 3$$

Solución: Para estudar o signo da derivada calculamos os puntos onde a derivada é 0 (son os valores nos que pode cambiar o signo).

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

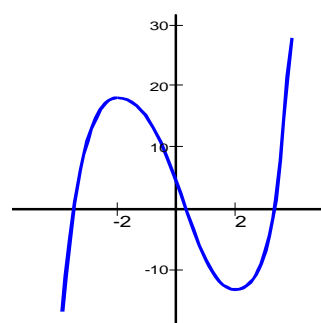
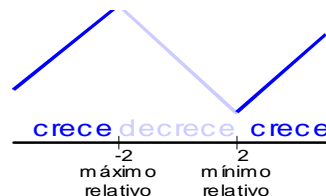
Os puntos onde a derivada é 0 delimitan tres intervalos en \mathbb{R} . Eliximos un valor en cada un e substituímolos na función derivada para estudar o signo:

1. $(-\infty, -2)$: $f'(-3)=15$, a función é crecente neste intervalo.
2. $(-2, 2)$: $f'(0)=-12$, a función é decrecente neste intervalo.
3. $(2, +\infty)$: $f'(3)=15$, a función é crecente neste intervalo.

O estudo do signo da derivada ademais de darnos unha idea da forma da gráfica da función, permítenos saber que en $x=-2$ hai un máximo relativo (a función cambia de crecente a decrecente) e en $x=2$ un mínimo relativo (pasa de decrecente a crecente).

Para obter a gráfica da función só é necesario dar algúns valores, en especial nos extremos relativos:

x	-2	2	0	-3	-4
f(x)	19	-13	3	12	-6



Exemplo: Representa graficamente a función:

$$f(x) = x^3$$

Solución: Para estudar o signo da derivada calculamos os puntos onde a derivada é 0 (son os valores nos que pode cambiar o signo).

$$f'(x) = 3x^2$$

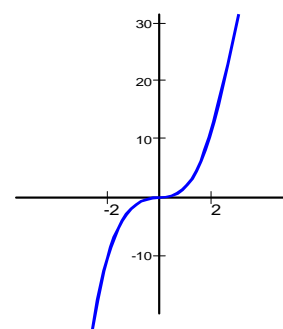
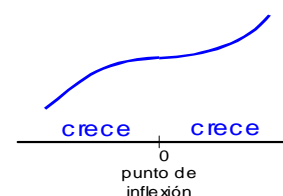
$$3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

O punto onde a derivada é 0 delimita dous intervalos en \mathbb{R} . Eliximos un valor en cada un para estudar o signo da derivada:

1. $(-\infty, 0)$: $f'(-1)=3$, a función é crecente neste intervalo.
2. $(0, +\infty)$: $f'(1)=3$, a función crece tamén nestoutro intervalo.

Como non se produce un cambio no crecemento en $x=0$, ten que corresponder a un punto de inflexión con tanxente horizontal.

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-1	0	1	8



Exercicio 7.8: estudia o crecemento da función $y = \frac{x}{x^2 + 4}$. e

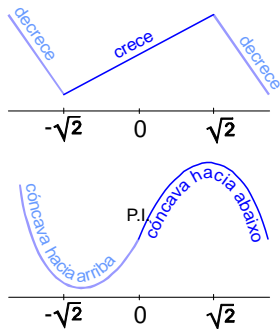
indica cales son os seus extremos relativos e de que tipo.

Exercicio 7.9: estudia o crecemento da función $y = x^5 - 15x^3$.

Derivada segunda e curvatura.

O signo da derivada primeira indica cando crece ou decrece unha función e o seu valor a inclinación da gráfica.

De xeito semellante, a derivada segunda proporciona información sobre a función orixinal.



- Derivada segunda positiva: a derivada primeira ten que ser crecente, ten que aumentar, e polo tanto a inclinación da función orixinal ten que ser cada vez “máis positiva”. A función orixinal ten que ser cóncava hacia arriba.
- Derivada segunda negativa: a derivada primeira é decrecente. A inclinación da función orixinal ten que ser cada vez “máis negativa”. A función orixinal ten que ser cóncava hacia abaixo.
- Derivada segunda 0: a función orixinal pode ter un extremo ou un punto de inflexión nese punto.

Exemplo: Representa graficamente a función: $f(x) = 6x - x^3$

Solución: Estudiamos o crecemento a partir da derivada:

$$f'(x) = 6 - 3x^2 \rightarrow 6 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

1. $(-\infty, -\sqrt{2})$: $f'(-2) = -6$, a función decrece neste intervalo.
2. $(-\sqrt{2}, 0)$: $f'(0) = 6$, a función crece neste intervalo.
3. $(0, \sqrt{2})$: $f'(\sqrt{2}) = -6$, a función decrece neste intervalo.

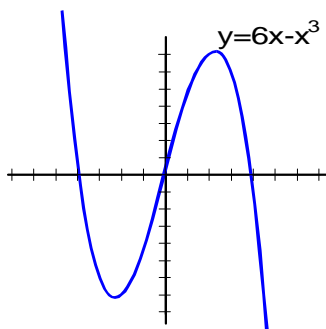
De xeito similar, podemos estudar a curvatura ca derivada segunda:

$$f''(x) = -6x \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

4. $(-\infty, 0)$: $f''(-2) = 12$, función cóncava hacia arriba neste intervalo.
5. $(0, \infty)$: $f''(\sqrt{2}) = -6$, función cóncava hacia abaixo neste intervalo.

Para facer a gráfica só resta dar algúns valores:

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	3
f(x)	-4	-5'66	0	5'66	-9



Derivadas e extremos

En moitas ocasións é necesario atopar un punto onde unha función acada o valor máis alto ou o máis baixo.

As derivadas proporcionánanos un método para poder facelo:

- 1) **Calculamos os puntos onde a derivada é 0.** Son os posibles extremos.
- 2) **Estudiamos se algún é o extremo que desexamos.** Os puntos onde a derivada vale 0 son máximos, mínimos ou puntos de inflexión. Temos varios xeitos de diferenciais:

- a) Estudiamos a curvatura da función neses puntos mediante o signo da derivada segunda. Nos máximos a función é cóncava hacia abaixo (derivada segunda negativa ou 0) e nos mínimos a función é cóncava hacia arriba (derivada segunda positiva ou 0).
- b) Estudiamos o crecemento da función nas proximidades de cada punto. Nos máximos a función cambia de crecente a decrecente (a derivada pasa de positiva a negativa) e nos mínimos xustamente ó revés.

O método a), baseado na derivada segundo, é máis doado de aplicar pero, se a derivada segunda é 0, non permite discriminar de que tipo de punto se trata (pode ser un máximo, un mínimo ou un punto de inflexión).

Exemplo: Dispoñemos de 200 m de aramio para cercar unha parte dunha leira. Queremos facer unha cerca de tres fíos e que por un lado linde cunha parede, ¿que dimensións deberá ter para que a área pechada sexa máxima?

Solución: A función que queremos optimizar é a área: $S=a \cdot b$
É unha función con dúas variables a que non sabemos calcularlle os extremos pero podemos transformala nunha dunha soa variable se temos en conta que dispoñemos de 200 m para construír a cerca:
 $200=3 \cdot (a+2b)$

Despexamos unha variable: $a = \frac{200}{3} - 2b$

Substituíndo na fórmula da área: $S = \left(\frac{200}{3} - 2b \right) \cdot b = \frac{200b}{3} - 2b^2$

Buscamos os extremos:

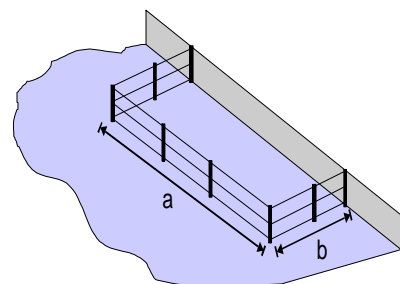
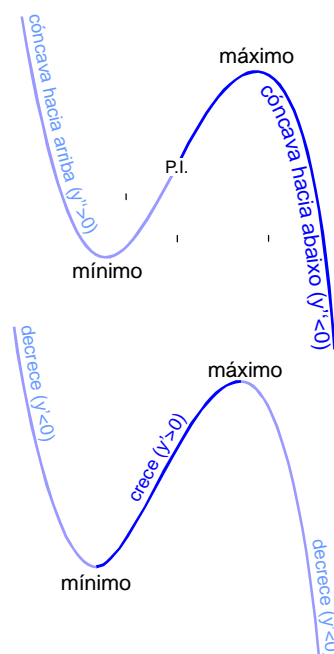
$$S' = \frac{200}{3} - 4b$$

$$\frac{200}{3} - 4b = 0 \rightarrow b = \frac{200}{12} = 16\bar{6} \text{ m} \rightarrow a = \frac{200}{3} - 2 \cdot 16\bar{6} = 33\bar{3} \text{ m}$$

Comprobamos se é o máximo que buscamos:

$S'' = -4 \rightarrow$ A función é sempre cóncava, ten que ser un máximo.

Exercicio 7.10: Queremos facer un depósito cilíndrico de chapa metálica, sen tapa, de 3 m^3 de capacidade. ¿Cales deben ser as súas dimensións para que a cantidade chapa sexa mínima?

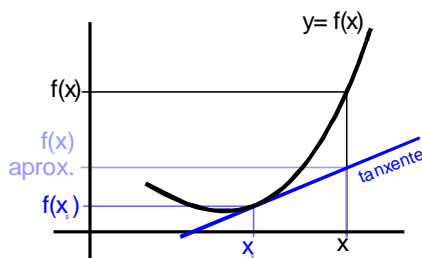


Aproximación pola tanxente

A derivada dunha función nun punto é un límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O que significa que se x está próximo a x_0 , a derivada será aproximadamente igual ó cociente:



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Obtemos que $f(x)$, cando x está próximo a x_0 , é aproximadamente igual ó valor da tanxente nese punto.

Podemos calcular valores descoñecidos dunha función, aproximándoa pola recta tanxente nun punto próximo.

Exemplo: Calcula o valor da función $f(x)=x^3-5x$ en $x=3$ aproximando a función pola tanxente en $x=2$. Comproba como varia o grao de aproximación ó achegar x a 2.

Solución: Calculamos a ecuación da recta en $x=2$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 5 \rightarrow f'(2) = 7 \\ f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 = -2 \end{array} \right\} y = 7(x - 2) + (-2) \rightarrow y = 7x - 16$$

$$f(3) \approx 7 \cdot 3 - 16 = 5$$

O valor real é: $f(3)=3^3-5 \cdot 3=12$. O erro é pois de $12-5=7$

Vexamos como varia ó achegarnos ó punto de tanxencia:

$$f(2'5) \approx 7 \cdot 2'5 - 16 = 1.5 \quad \text{Erro} = 3'125 - 1'5 = 1'625$$

$$f(2'1) \approx 7 \cdot 2'1 - 16 = -1.3 \quad \text{Erro} = -1'239 - (-1.3) = 0'061$$

$$f(2'01) \approx 7 \cdot 2'01 - 16 = -1.93 \quad \text{Erro} = -1.93 - (-1'9294) = 0'0006$$

Ampliación

Notación de Leibnitz

Newton e Leibnitz traballando de xeito independente, elaboraron a fundamentación do Cálculo Infinitesimal pero foi a notación de Leibnitz pola súa simplicidade e claridade a que se adoptou de xeito universal e continúa utilizándose na actualidade:

Leibnitz chamoulle dx á *variación máis pequena posible* de x , é dicir:

$$dx = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

Á función noméase $y=f(x)$ e a súa variación dy : $dy = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0))$

Dese xeito a derivada en x_0 será: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = f'(x)dx$

Debes ter en conta que, aínda que o pareza, a expresión dy/dx non é un cociente senón un límite dun cociente, pero en ocasións é útil manexalo como tal pois permite automatizar toda unha serie de cálculos manexando dx e dy como se se tratase de variables calquera.

Exemplo: Vexamos como pode calcularse a función derivada de $y = (1 - x^2)^5$

Solución: Facemos $t=1-x^2$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \xrightarrow[\frac{dt}{dx} = \frac{d(1-x^2)}{dx} = -2x]{\frac{dy}{dt} = \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4} \frac{dy}{dx} = 5(1-x^2)^4 \cdot (-2x)$$

O proceso anterior coñécese como **regra da cadea**, pero non é unha demostración senón un xeito de automatizar un proceso mais complexo (algo así como “cambear” de membro un termo dunha ecuación).

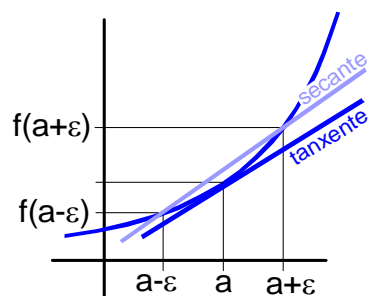
Derivadas numéricas

Definimos a derivada dunha función nun punto como un xeito de medir a variación instantánea da función nese punto. Dado que esa variación non pode calcularse directamente, aproximámola mediante taxas de variación medias en intervalos cada vez menores, de onde resulta a expresión:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ese límite, se a función é continua, é indeterminado polo que o seu cálculo pode resultar bastante complexo

$$\left(f(x) = f(a) \text{ cando } x \rightarrow a \Rightarrow f'(a) = \frac{0}{0} \right).$$



A derivada coincide coa pendente da tanxente e a taxa de variación media coa pendente da secante que, como pode verse, son moi semellantes.

Podemos evitar calculalo renunciando ó valor exacto e utilizando unha aproximación nun intervalo suficientemente pequeno, a taxa de variación media.

Na maioría dos casos, a aproximación é mellor utilizando a TVM nun intervalo centrado no punto (procedemento utilizado polas calculadoras gráficas):

$$Df(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx \frac{f(a + \varepsilon) - f(a - \varepsilon)}{(a + \varepsilon) - (a - \varepsilon)} = \frac{f(a + \varepsilon) - f(a - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

Función	Derivada en x=2	TVM _[1'99,2'01] (ε=0'01)
f(x)=x ² +5x-1	9	9
f(x)=x ³	12	12'0001
f(x)=sen(x)	cos(2)=-0'416146...	-0'4161399
f(x)=e ^x	e ² =7'389056...	7'389179