

Actividades

Exercicio 7.1: A lonxitude dunha barra metálica segundo a temperatura ven dada pola función $l(t) = 0,1 \cdot t + 120$, onde t é a temperatura en $^{\circ}\text{C}$ e $l(t)$ a medida da barra en cm.

¿Calcular a variación media da lonxitude da barra entre $t=10^{\circ}\text{C}$ e $t=40^{\circ}\text{C}$? ¿Que representa fisicamente esa variación?

Solución: Calculamos a taxa de variación media de $l(t)$ no intervalo $[10,40]$:

$$\text{TVM}_{[10,40]} = \frac{l(40) - l(10)}{40 - 10} = \frac{124 - 121}{40 - 10} = 0,1 \text{ cm}/^{\circ}\text{C}$$

Esa taxa de variación describe o ritmo de variación medio da lonxitude da barra entre 10°C e 40°C é dicir, a dilatación media da barra por cada $^{\circ}\text{C}$ que varíe a temperatura (cada $^{\circ}\text{C}$ que aumenta a temperatura, a barra estírase $0,1$ cm, por termo medio).

Exercicio 7.2: a velocidade dun móbil ven dada pola expresión $v(t) = 2t^2$ (t , tempo en segundos e $v(t)$, velocidade en m/s).

Calcula $v'(2)$ e explica que mide ese valor.

Solución: $v'(t) = 4t$, logo $v'(2) = 8$.

A derivada nun punto expresa o estado de cambio da función nese punto. Neste caso expresa o cambio de velocidade, ou sexa, a aceleración.

Para controlar as unidades, recordaremos que, en xeral, a derivada é:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ sendo agora } f \text{ a velocidade e } x \text{ o tempo, logo o}$$

cociente será metros/segundo entre segundos, que representamos como m/s^2 .

Exercicio 7.3: Demostra que a función derivada de $f(x)=x^3$ é $f'(x)=3x^2$

Solución: Temos unha definición para a derivada nun punto. Aplicando esa definición a un punto xenérico obteremos unha fórmula para a derivada en calquera punto, a fórmula da función derivada.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (3a^2 + 3ah + h^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

Exercicio 7.4: Demostra que a derivada dunha función constante é 0.

Solución: Podemos partir dunha expresión xeral: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Se f é constante, sempre é $f(x) = f(x_0)$, logo todos os cocientes serán da forma 0 entre “algo” (o que valga $x - x_0$, por moi pequeno que sexa), cuxo resultado será sempre 0, polo cal o límite é 0 xa que non se “move” deste valor nulo.

Exercicio 7.5: Demostra que a derivada da función identidade, $f(x)=x$, é 1.

Solución: Podemos partir dunha expresión xeral: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ao ser $f(x) = x$ e $f(x_0) = 0$, en todos os cocientes o numerador será igual ca o denominador: $x - x_0 / x - x_0$, cuxo resultado será sempre 1, polo cal o límite é 1 xa que non se “move” deste valor.

Exercicio 7.6: O espazo percorrido por un móbil ven dado pola función $s(t)=9-t^2$, t o tempo en segundos e $s(t)$ o espazo en m. Atopa a fórmula da función que describe a súa aceleración instantánea. ¿É un movemento uniformemente variado?

Solución: Un movemento é uniformemente variado cando a súa aceleración é constante. Empecemos por calcular a velocidade, que sabemos é a derivada do espazo (variación do espazo en relación ó tempo): $v(t)=s'(t)=-2t$.

A aceleración é a variación da velocidade en relación ó tempo, será pois a derivada da velocidade e tamén a derivada segunda do espazo:

$$a(t)=v'(t)=s''(t)=-2.$$

A aceleración é constante, o movemento é uniformemente variado.

Exercicio 7.7: atopa a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $y = \frac{1}{x}$ no punto de abscisa $x=2$

Solución: A ecuación da recta que pasa por un punto $P(x_0, y_0)$ é: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

Sendo “ m ” a pendente (medida da inclinación) que, no caso de tratarse da tanxente a unha curva nun punto dado, coincide coa derivada desta no dito punto:

Expresamos a función en forma de potencia e aplicamos a correspondente regra de derivación: $f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$. Para $x = 2$, $f'(2) = -0'25$.

A outra coordenada do punto, por ser da curva $y = \frac{1}{x}$, obtémola substituíndo x polo 2 : $y_0 = 0'5$. Finalmente, a recta tanxente terá de ecuación: $y - 0'5 = -0'25 \cdot (x - 2)$

Exercicio 7.8: estudia o crecemento da función $y = \frac{x}{x^2 + 4}$. e indica cales son os seus extremos relativos e de que tipo.

Solución: O crecemento estudámolo segundo o valor da derivada. Comezamos por

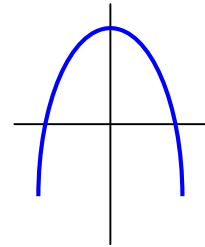
calculala, utilizando a regra do cociente: $y = \frac{x}{x^2 + 4} \rightarrow y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 4) - 2x \cdot x}{(x^2 + 4)^2}$,

simplificamos: $y' = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$

i) Anúlase cando se anule o numerador (non anulándose ao mesmo tempo o denominador): $-x^2 + 4 = 0 \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow x = \pm 2$

Comprobamos que tanto para $x = 2$ como para $x = -2$ o denominador da derivada non se anula, de feito non se anula nunca: é sempre positivo.

ii) É positiva cando o sexa o numerador, xa que o denominador é sempre positivo: Podemos “debuxar” rapidamente un esquema do numerador se recoñecemos que se corresponde a unha parábola invertida (signo – en x^2) e temos en conta que se anula no -2 e no 2:



É positiva entre -2 e 2.

Repasamos: a derivada é + desde -2 a 2, logo nese intervalo $(-2, 2)$ a función é crecente.

iii) É negativa cando o sexa o numerador, xa que o denominador é sempre positivo:

É positiva antes de -2 e despois de 2.

Repasamos: a derivada é - desde -2 a 2, logo neses intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$ a función é decrecente.

Exercicio 7.9: estudia o crecemento da función $y = x^5 - 15x^3$.

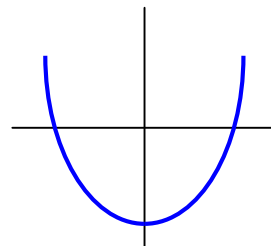
Solución: O crecemento estudámolo segundo o valor da derivada. Comezamos por calculala: $y = x^5 - 15x^3 \rightarrow y' = 5x^4 - 45x^2$.

i) Cando se anula? Modificamos a expresión sacando factor común: $y' = 5x^2 \cdot (x^2 - 9)$ Por ser un produto, anularase cando se anule ao menos un dos seus factores: cando $x = 0$ e cando $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

ii) É positiva cando os dous factores teñan o mesmo signo. Como $5x^2$ é sempre +, dependerá de $x^2 - 9$ que, coma no exercicio anterior podemos “debuxar” rapidamente un esquema se recoñecemos que se corresponde a unha parábola

e temos en conta que se anula no -3 e no 3:

É positiva antes de -3 e despois de 3.



Repasamos: a derivada é + antes de -3 e despois de 3, logo neses intervalos $(-\infty, -3)$ e $(3, +\infty)$ a función é crecente.

iii) É negativa cando os dous factores teñan signos contrarios. Como $5x^2$ é sempre +, sucederá cando $x^2 - 9$ sexa -: entre -3 e 3.

Repasamos: a derivada é - entre -3 e 3, logo no intervalo $(-3, 3)$ a función é decrecente.

Exercicio 7.10: Queremos facer un depósito cilíndrico de chapa metálica, sen tapa, de 3 m^3 de capacidade. ¿Cales deben ser as súas dimensións para que a cantidade de chapa sexa mínima?

Solución: A función a optimizar é a que describe a área total do depósito:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

É unha función con dúas variables, r e h , utilizando que o volume debe ser de 3 m^3 podemos transformala noutra dunha variable:

$$V = \pi r^2 h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$$

$$A_{\text{total}} = \pi r^2 + 2\pi r \frac{3}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{6}{r}$$

Os extremos serán:

$$A' = 2\pi r - \frac{6}{r^2}$$

$$2\pi r - \frac{6}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 6 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6}{2\pi}} = 0'985 \text{ m}$$

Comprobamos se ese punto é o extremo buscado:

- $r = 0'5 \rightarrow A' = 2\pi \cdot 0'5 - \frac{6}{0'5^2} = -20'9 < 0$ decrece antes de $r = 0'985$
- $r = 1 \rightarrow A' = 2\pi \cdot 1 - \frac{6}{1^2} = 0'28 > 0$ crece despois de $r = 0'985$

No punto $r = 0'985$ hai un mínimo pois pasa de decrecer a crecer e, polo tanto, as dimensións do depósito deben ser $0'985$ de radio e $0'985$ de altura.