

Resumo

Producto escalar de dous vectores

Definición: Produto dos módulos polo coseno do ángulo: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\hat{A})$

Cálculo: Mediante a expresión analítica $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

Propiedades:

- **Conmutativa:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- **Multilinearidade:**
Suma: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
Produto por escalares: $\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{w}) = (a \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = a \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
- **Interpretación xeométrica:** $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\hat{A}) = |\vec{v}| \cdot \text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w})$
- **Proxección dun vector sobre outro:** $\text{prox}_{\vec{v}}(\vec{w}) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|}$
- **Dous vectores son perpendiculares se o seu produto escalar é 0.**
 $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- **Vector perpendicular a outro:** o vector $\vec{w}(-v_2, v_1)$ é perpendicular a $\vec{v}(v_1, v_2)$.

Módulo dun vector

É a raíz do produto escalar do vector por si mesmo: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Distancia entre dous puntos

Módulo do vector que vai dun punto ao outro:

$$\left. \begin{matrix} P(p_1, p_2) \\ Q(q_1, q_2) \end{matrix} \right\} d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Ángulo de dous vectores

Mídese a partir do coseno:

$$\left. \begin{matrix} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{w} = (w_1, w_2) \end{matrix} \right\} \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

Ecuación normal da recta

Necesitamos un punto da recta $P(p_1, p_2)$ e un vector perpendicular (característico) $\vec{n}(n_1, n_2)$. A ecuación será: $[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$

Ángulo de dúas rectas

Menor dos ángulos que forman ao cortarse.

$$\cos(r, r') = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{v}'|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|} \quad (\vec{v}, \vec{w} \text{ vectores de dirección ou perpendiculares ás rectas})$$

Distancia dun punto a unha recta

Mínimo das distancias do punto ós puntos da recta

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ P(p_1, p_2) \end{array} \right\} \quad d(P, r) = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Lugares xeométricos.

Conxunto de puntos que verifican unha condición.

- **Mediatriz dun segmento:** Lugar xeométrico dos puntos que equidistan dos extremos do segmento.
- **Bisectriz de dúas rectas:** Lugar xeométrico dos puntos que equidistan das rectas dadas.
- **Circunferencia:** Lugar dos puntos que están a unha distancia r do centro .

Ecuación da circunferencia de centro a orixe e radio r : $x^2 + y^2 = r^2$

- **Elipse:** Lugar dos puntos que a suma das súas distancias ós focos é constante (esa constante ten que ser a medida do eixe maior da elipse).

A ecuación da elipse de centro a orixe e semieixes a e b é: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- **Hipérbola:** Lugar dos puntos que a diferenza das súas distancias ós focos é constante (esa diferenza ten que ser o dobre do semieixe a). A ecuación da elipse

de centro a orixe e semieixes a e b é: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- **Parábola:** Lugar dos puntos que equidistan dun punto e dunha recta .
 - **De eixe vertical** (a directriz é unha recta horizontal): $y = ax^2 + bx + c$
 - **De eixe horizontal** (directriz vertical). Ecuación das centradas na orixe $y^2 = 4cx$