

Tema 5: posibles solucións 1

Problema 5.1

Comproba que a abscisa do punto de corte das parábolas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$ soluciona efectivamente o problema da duplicación dun cubo de aresta a .

Solución: A duplicación do cubo é un problema clásico da Matemática Grega. Consiste en, a partir dun cubo, construír outro que teña volume dobre.

É un problema que non pode resolverse cos métodos empregados pola Matemática Grega (construcións xeométricas empregando só regra e compás), pero que cos métodos alxébricos actuais é doado.

Podemos calcular as dimensións do cubo dobre resolvendo unha ecuación:

Chamámoslle a a aresta do cubo dado e x a do cubo que queremos construír:

- Volume do cubo orixinal: $V_{\text{cubo}} = a^3$
- Volume do cubo dobre: $V = x^3 \xrightarrow{\text{debe ser dobre do anterior}} x^3 = 2a^3$
- Resolvendo a ecuación: $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$
- A aresta do cubo de volume dobre calcúlase multiplicando a aresta orixinal por $\sqrt[3]{2}$.

Comprobemos que podemos obter ese valor como intersección das curvas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$.

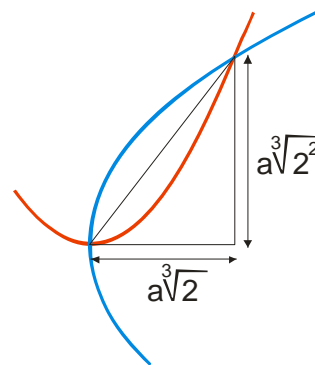
Temos que resolver o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = ay \rightarrow y = \frac{x^2}{a} \\ y^2 = 2ax \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sustitución}} \left(\frac{x^2}{a} \right)^2 = 2ax \rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \rightarrow x^4 = 2a^3x$$

Trátase dunha ecuación de grao 4. Deixamos só un 0 nun dos membros:

$$x^4 - 2a^3x = 0 \xrightarrow{\text{sacando factor común } x} x(x^3 - 2a^3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2a^3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \end{cases}$$

Loxicamente, os gregos non resolvían así o problema: debuxaban as dúas parábolas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$ (que tampouco escribían así) a partir dos seus focos e directrices.



Tema 5: posibles soluciones 2

Exercicio 5.1

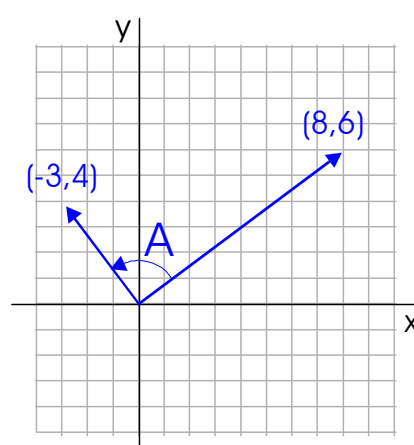
Calcula o produto escalar dos vectores $(-3,4)$ e $(8,6)$ e interpreta o resultado.

Solución: Utilizando a expresión analítica do produto escalar resulta:
 $(-3,4) \cdot (8,6) = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$

O produto dos vectores é: $|(-3,4)| \cdot |(8,6)| \cdot \cos(A)$

Para que o produto sexa 0 debe ser 0 algún dos factores:

- ¿Algún dos módulos é 0?: Neste caso non é así, o único vector con módulo 0 é $\vec{0} = (0,0)$.
- Logo o coseno é 0: O que significa que o ángulo que forman é de 90° ou 270° . Os vectores son perpendiculares.



Exercicio 5.2

Atopa un vector perpendicular ao vector $(6,2)$

Solución: Sabemos que dous vectores perpendiculares teñen produto escalar 0. Só temos que atopar un vector que multiplicado escalarmente por $(6,2)$ dea 0:

$$(6,2) \cdot (v_1, v_2) = 0 \rightarrow 6v_1 + 2v_2 = 0$$

Resulta unha ecuación con dúas incógnitas que, polo tanto, terá moitas solucións. Nós só necesitamos unha, por exemplo $(v_1, v_2) = (-2,6)$

En xeral, para atopar un vector perpendicular a outro só temos que inverter as súas compoñentes e cambiarlle o signo a unha delas.

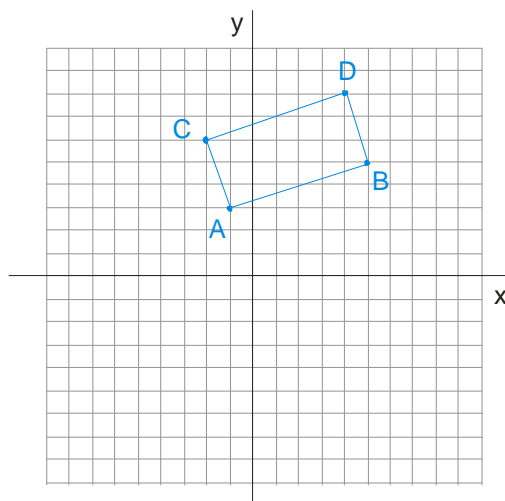
Exercicio 5.3

Comproba que os puntos $A(-1,3)$, $B(5,5)$, $C(-2,6)$ e $D(4,8)$ forman os vértices dun rectángulo.

Solución: Un rectángulo é un cuadrilátero con todos os seus ángulos rectos.

Comprobamos que os ángulos son efectivamente rectos ou, o que é o mesmo, os vectores que os forman son perpendiculares:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-2,6) - (-1,3) = (-1,3) \\ \overrightarrow{AB} = (5,5) - (-1,3) = (6,2) \end{array} \right\} \text{ serán perpendiculares}$$



se o seu produto escalar é 0: $(-1,3) \cdot (6,2) = -1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0$. Son perpendiculares. O ángulo \hat{A} é recto.

Debemos facer o mesmo cos demais ángulos (basta facelo con tres pois os ángulos dun cuadrilátero suman sempre 360):

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (-1,3) - (-2,6) = (1,-3) \\ \overrightarrow{CD} = (4,8) - (-2,6) = (6,2) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{perpendiculares?}} (1,-3) \cdot (6,2) = 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (-1,3) - (5,5) = (-6,-2) \\ \overrightarrow{BD} = (4,8) - (5,5) = (-1,3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{perpendiculares?}} (-6,-2) \cdot (-1,3) = -6 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 0$$

Un xeito un pouco máis doado era comprobar que se trataba dun paralelogramo (os vectores que forman dous lados opostos iguais) e que un dos ángulos é recto.

Exercicio 5.4:

Calcula o módulo do vector $(8,6)$

Solución: $|(8,6)| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

Exercicio 5.5

Calcula a área do triángulo de vértices nos puntos $A(4,6)$, $B(5,-1)$ e $C(-1,1)$

Solución:

Necesitamos a base e a altura do triángulo. Poderíamos calcular os lados do triángulo (distancias entre os vértices) e un dos ángulos a partir dos vectores que forman os lados para finalmente calcular a altura, pero a utilización de vectores proporciona un método moito máis rápido e elegante:

- Base: $d(C,B) = |\overrightarrow{CB}| = |(6,-2)| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$

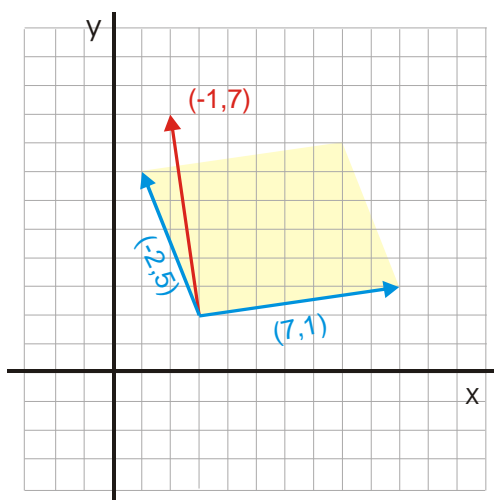
- Altura: A altura é a proxección do vector \overrightarrow{BA} sobre un vector \vec{n} perpendicular á base:
 $\overrightarrow{BC} = (-6,2) \Rightarrow \vec{n} = (2,6)$

$$\text{prox}_{\vec{n}} \overrightarrow{BA} = \frac{(-1,7) \cdot (2,6)}{|(2,6)|} = \frac{-1 \cdot 2 + 7 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{40}{\sqrt{40}}$$

A área é: $S = \frac{1}{2} \sqrt{40} \cdot \frac{40}{\sqrt{40}} = 20$

Exercicio 5.6

Calcula a área do paralelogramo determinado polo vectores $(7,1)$ e $(-2,5)$ e inventa un procedemento para calcular a área dun paralelogramo calquera coñecendo os vectores que forman os seus lados.



Solución:

Representamos os vectores. Lembra que os vectores son “libres”, poden situarse onde desexemos, neste caso coa orixe en común no punto (3,2).

A área dun paralelogramo é igual ao produto da base pola altura.

No esquema da esquerda vemos que a base é o módulo dun dos vectores, \vec{v} (7, 1) por exemplo, e a altura é o módulo da proxección do outro, \vec{w} (-1, 5), sobre un vector perpendicular ao anterior.

- Base: $|(7,1)| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- Altura: un vector \vec{n} perpendicular á base é (-1,7)

$$prox_{\vec{n}} \vec{w} = \frac{(-1,5) \cdot (-1,7)}{|(-1,7)|} = \frac{36}{5\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

A área é: $S = 5\sqrt{2} \cdot \frac{18\sqrt{2}}{5} = 36$

Como sempre poderemos utilizar un vector \vec{n} perpendicular á base elixida, \vec{v} , co seu mesmo módulo, de non facermos operacións poderemos observar que:

- Base: $|\vec{v}|$
 - Altura: $prox_{\vec{n}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}|}$
- $$S = |\vec{v}| \cdot prox_{\vec{n}} \vec{w} = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}|} = \vec{w} \cdot \vec{n}$$

Expresándoo por medio das compoñentes dos vectores:

$$\vec{v}(v_1, v_2); \vec{w}(w_1, w_2); \vec{n}(-v_2, v_1) \rightarrow S = \vec{w} \cdot \vec{n} = -w_1 \cdot v_2 + w_2 \cdot v_1$$

Tema 5: posibles solucións 3

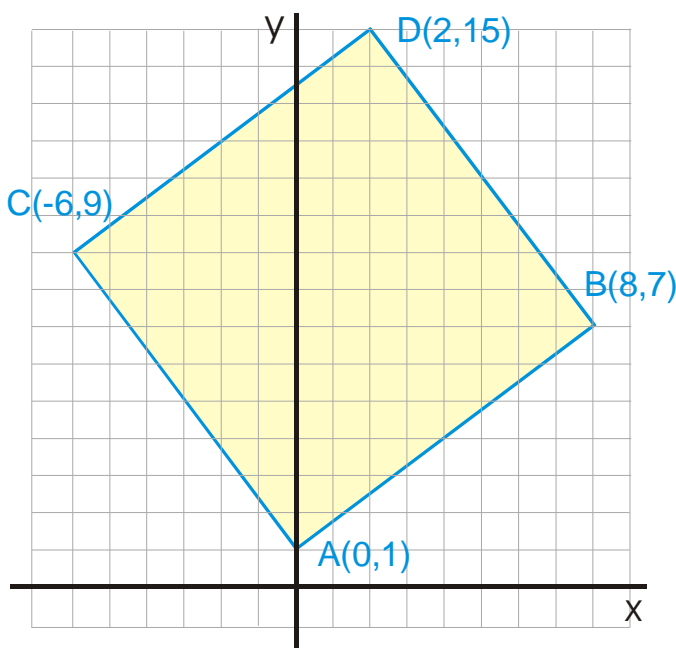
Exercicio 5.7

Calcula a distancia entre os puntos P(1,-5) e Q(4,2)

Solución: $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(3,7)| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7'62$

Exercicio 5.8:

Comproba que o cuadrilátero de vértices A(0,1), B(8,7), C(-6,9) e D(2,15) é un cadrado e calcula a súa área.



(Sempre que sexa posible, debemos representar a situación proposta)

Solución:

Podemos organizar a resposta de varias maneiras. Por exemplo, comprobar que os vectores AB e BD son perpendiculares e iguais en módulo, e que CD e AC son, respectivamente paralelos a eles:

Paralelismos:

$$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} = (8,6) \parallel (8,6)$$

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD} = (-6,8) \parallel (-6,8)$$

Resultan evidentes, xa que coinciden.

Módulos:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

Perpendiculares:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = (8,6) \cdot (-6,8) = -48 + 48 = 0$$

A área é:

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = 100$$

Exercicio 5.9

Determina canto mide o ángulo que forman (2,3) e (4,1)

Solución:

$$\cos(A) = \frac{(2,3) \cdot (4,1)}{|(2,3)| \cdot |(4,1)|} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2}} = 0'74$$

$$\text{O ángulo é: } A = \cos^{-1}(0'74) = 42'26^\circ$$

Exercicio 5.10

Atopa un vector de módulo 1 que forme co vector (6,-2) un ángulo de 90°

Solución:

Sexa (x, y) o vector buscado:

$$\cos(90^\circ) = \frac{(x, y) \cdot (6, -2)}{|(x, y)| \cdot |(6, -2)|} = \frac{6x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{40}} = \frac{6x - 2y}{1 \cdot \sqrt{40}} = 0 \Rightarrow 6x - 2y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 1 \Rightarrow 10x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \\ y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Exercicio 5.11

Atopa a ecuación xeral da recta que pasa polos puntos A(2,-1) e B(5,4)

Solución:

Podemos utilizar como punto P o primeiro deles, o A(2,-1), como vector dirección o \overline{AB} (3,5) e como vector \vec{n} perpendicular, o (-5,3):

$$[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$$

$$(x - 2, y + 1) \cdot (-5, 3) = 0 \rightarrow -5x + 10 + 3y + 3 = 0 \rightarrow -5x + 3y + 13 = 0$$

Exercicio 5.12

Calcula o ángulo formado polas rectas $-2x + 3y = 4$ e $5x + y = 2$

Solución:

Os vectores característicos das rectas son (-2,3) e (5,1).

$$\cos(A) = \frac{(-2,3) \cdot (5,1)}{|(-2,3)| \cdot |(5,1)|} = \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = 0'38 \rightarrow A = \cos^{-1}(0'38) = 67'62$$

Exercicio 5.13

Calcula a distancia do punto (3,-5) á recta $-2x + 3y = 4$

Solución: $d(A, r) = \frac{|-2 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) - 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{13}} = 5'824$

Tema 5: posibles solucións 4

Exercicio 5.14

Atopa a ecuación da mediatriz do segmento de extremos (2,5) e (5,1)

- Empregando a definición de mediatriz como perpendicular no punto medio.
- Como lugar xeométrico.

Solución:

- Para unha recta, podemos utilizar como vector \vec{n} perpendicular o que forman eses dous puntos A(2,-1) e B(5,1), e como punto P o punto medio deles:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} (3,2) \quad P(3.5, 0)$$

$$[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$$

$$(x - 3.5, y - 0) \cdot (3, 2) = 0 \rightarrow 3x - 10.5 + 2y = 0 \rightarrow 3x + 2y - 10.5 = 0$$

- Como lugar xeométrico, igualamos as distancias:

$$d(A, X) = d(B, X) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$$

↓

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$$

↓

$$\rightarrow 6x + 4y - 21 = 0$$

Simplificando, entre 2, esta ecuación obtemos exactamente a mesma do apartado a)

Exercicio 5.15

Atopa as ecuacións das bisectrices do ángulo formado polas rectas: $3x-4y+3=0$ e $8x+6y-5=0$

Solución:

As bisectrices son o lugar xeométrico dos puntos que equidistan das dúas rectas. Sexa X(x,y) un punto dese lugar xeométrico:

$$d(X, r) = d(X, s) \rightarrow \left| \frac{3x - 4y + 3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{8x + 6y - 5}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \right| \rightarrow \left| \frac{3x - 4y + 3}{5} \right| = \left| \frac{8x + 6y - 5}{10} \right|$$

Tendo en conta que o valor absoluto cambia o signo se a expresión é negativa ou deixa igual se é positiva, podemos desdobrar a ecuación anterior en:

$$\frac{3x - 4y + 3}{5} = \pm \frac{8x + 6y - 5}{10} \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 4y + 3}{5} = \frac{8x + 6y - 5}{10} \rightarrow -10x - 70y + 55 = 0 \\ \frac{3x - 4y + 3}{5} = -\frac{8x + 6y - 5}{10} \rightarrow 70x - 10y + 50 = 0 \end{cases}$$

Exercicio 5.16

Atopa a ecuación da circunferencia de centro no punto (4,0) e tanxente á recta $-4x+3y+9=0$.

Solución:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

Necesitamos coñecer o raio: é a distancia entre o centro e a recta tanxente

$$r = d(P, \text{tan}) = \frac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-7|}{5} = 1'4$$

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 1'4^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x = -1'4^2$$

Exercicio 5.17

¿A ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ corresponde a unha circunferencia? ¿A cal?

Solución:

Podemos intentar converter esa ecuación noutra equivalente co formato:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{onde } (a, b) \text{ é o centro e } r \text{ o raio.}$$

Se desenvolvemos os cadrados teremos:

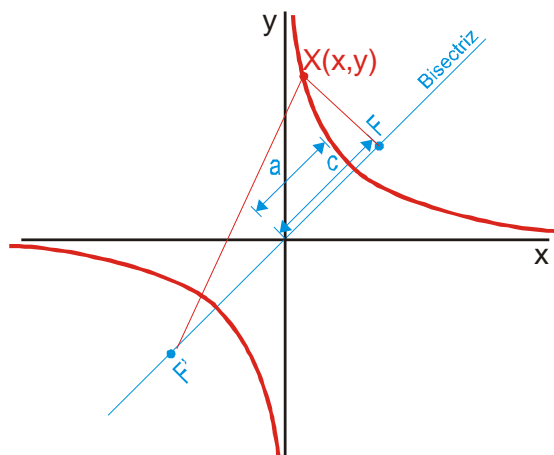
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Daquela:

- $-2ax$ deberá ser $-4x$, logo $a = 2$
- $-2by$ deberá ser $6y$, logo $b = -3$
- $a^2 + b^2 - r^2$ será 12 , logo $r = 1$

Problema 5.2

Chámanse hipérbolas equiláteras ás que teñen os semieixes a e b iguais. Atopa a ecuación dunha hipérbole equilátera de centro na orixe de coordenadas e cos focos na bisectriz do 1º e 3º cuadrantes.



Solución:

A nosa hipérbole é o lugar xeométrico dos puntos que a diferenza das súas distancias ós focos de coordenadas (a,a) e $(-a,-a)$ é $2a$.

$$\text{A ecuación será: } \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a$$

Intentemos escribirla de xeito máis “elegante” facendo desaparecer ás raíces, para o que necesitamos illalas nun membro e elevar ao cadrado:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}$$

↓ elevando ao cadrado

$$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}\right)^2$$

↓

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} + (x+a)^2 + (y+a)^2$$

Desenvolvemos os cadrados dos binomios e agrupamos os termos semellantes:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} + x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2$$

↓

$$-4ax - 4ay = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2}$$

↓ dividindo por 4a

$$-x - y = a + \sqrt{x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2}$$

Seguimos tendo unha raíz, polo que debemos illala e elevar ao cadrado para facela desaparecer:

$$-\sqrt{x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2} = a + x + y$$

↓

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2 = a^2 + 2ax + 2ay + 2xy + x^2 + y^2$$

↓

$$a^2 = 2xy$$

Obtemos unha ecuación sorprendentemente sinxela, que normalmente aparece na forma

explícita ou funcional: $y = \frac{k}{x}$ onde $k = \frac{a^2}{2}$.

Esa fórmula, $y = \frac{k}{x}$, corresponde a relación de proporcionalidade inversa entre x e y