

Unidade 4:

Xeometría vectorial afín

1. Coordenadas cartesianas e polares.
2. Os vectores libres do plano
 - 2.1. Concepto de vector.
 - 2.2. Características: Módulo, dirección e sentido.
3. Operacións con vectores.
 - 3.1. Suma de vectores e produto por escalares.
 - 3.2. Bases dos vectores do plano. Compoñentes dun vector.
4. A recta no plano.
 - 4.1. Ecuación vectorial da recta.
 - 4.2. Outras ecuacións da recta.

Introdución

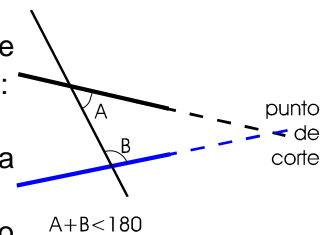
A Xeometría

Díse que foi no antigo exipcio onde naceu a Xeometría (xeo=terra, metría=medida): as enchentes do Nilo arrastraban consigo tódalas marcaxes das terras e os exipcios víanse obrigados situalas de novo. Necesitaban de planos, medir distancias e ángulos,... Pero, seguramente, podemos remontarnos máis atrás: as figuras abstractas que aparecen nos petróglifos tamén son unha forma de Xeometría.

Foron, sen embargo, os sabios da Grecia Clásica, en especial Euclides, os que elevaron á Xeometría a categoría de ciencia dándolle un conxunto de axiomas¹ nos que apoiarse.

Euclides estableceu os seus cinco famosos axiomas nos que debían basearse tódalas construcións e teoremas xeométricos:

- I. Por dous puntos pode trazarse unha única recta.
- II. Un segmento pode prolongarse de maneira continua ata unha liña recta infinita.
- III. Pode construírse unha circunferencia de centro un punto dado e cun radio dado.
- IV. Tódolos ángulos rectos son iguais.
- V. Se unha recta corta a outras dúas non paralelas, entón as dúas rectas córtanse do lado no que os ángulos interiores son menores que dous rectos. Este é o famoso V postulado², tamén coñecido como das paralelas, pois equivale a que “por un punto exterior a unha recta pode trazarse unha e só unha paralela a esa recta”.



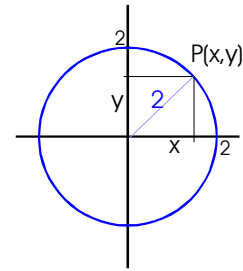
¹ De axio, xusto. Os axiomas son propostas que se consideran válidas por si mesmas. A partir deles, mediante razoamentos lóxicos, obtéñense as demais propiedades.

² Aplícase o termo postulado (de postular, propoñer) cando os axiomas son menos evidentes, pero seguen considerándose válidos.

Consecuencia destes postulados é que, para facer unha demostración, só pode utilizarse a regra e o compás.

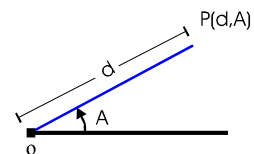
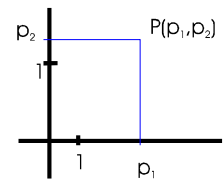
A Xeometría analítica

O matemático e pensador francés René Descartes (1596-1650) descubriu o xeito de transformar os problemas xeométricos en problemas numéricos e alxébricos mediante a introdución de coordenadas (a circunferencia de radio 2 e centro na orixe equivale á ecuación $x^2+y^2=4$ porque as coordenadas dos puntos da circunferencia cumpren esa ecuación e, ademais, son os únicos que a cumpren).



Sistemas de coordenadas no plano

- Coordenadas cartesianas: Eliximos unha orixe de coordenadas e dúas rectas pasando pola orixe. Sobre cada unha das rectas e partindo da orixe eliximos dúas medidas (que poden ser iguais ou non). A posición de cada punto do plano queda determinada pola súa distancia ós eixes de coordenadas (medida en relación as unidades que temos elixido).
- Coordenadas polares: Elíxese a orixe, unha semirecta (eixe), e unha unidade de medida para as distancias. As coordenadas dun punto son a distancia dese punto a orixe e o ángulo que forma co eixe a “visual” desde a orixe ó punto.



Exercicio 4.1:

- Cales son as coordenadas polares dos puntos (4,3), (-12,9), (-6,-8) e (8,-6)?
- Cales son as coordenadas cartesianas dos puntos (6,45°), (6,135°), (6,225°) e (6,315°)?
- Atopa fórmulas que permitan cambiar automaticamente de coordenadas cartesianas a polares, e viceversa.

Xeometría Afín

Xeometría Afín

A Xeometría Afín (afín=semellante) é a que só trata de problemas de intersección e paralelismo e non utiliza as medidas de distancias nin de ángulos.

Para facilitar o seu estudio imos apoiarnos nos vectores do plano, o que nos permitirá resolver moitos problemas dun xeito máis rápido e elegante.

Vector

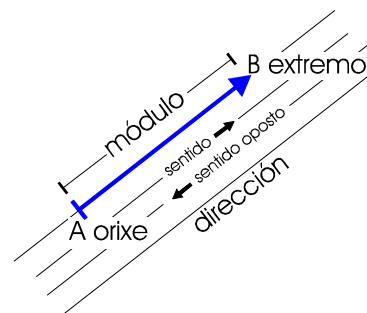
Chamase **vector libre** do plano a un segmento orientado que poderemos situar libremente en calquera posición do plano.

Para determinar un vector necesitaremos coñecer:

- **Módulo**, é dicir a lonxitude do segmento.
- **Dirección**, entendendo por tal o feixe de rectas paralelas que o contén (dous vectores teñen a mesma dirección cando as rectas que os conteñen son paralelas).
- **Sentido**. Para cada dirección existen dous sentidos opostos segundo cara a onde apunte o vector (só podemos comparar os sentidos de vectores coa mesma dirección).

Outro xeito de determinar un vector é coñecendo o punto do que parte (orixe) e o punto onde remata (extremo).

Os vectores nomearémolos con letra minúscula cunha frecha enriba, \vec{v} , ou indicando a orixe e o extremo, \overrightarrow{AB} .



Para describir exactamente moitas das magnitudes que coñeces cumpre un número, para a súa magnitude, pero tamén unha dirección e un sentido: Forzas, velocidades, aceleracións, intensidade eléctrica, posición dun punto, etc., descríbense utilizando vectores.

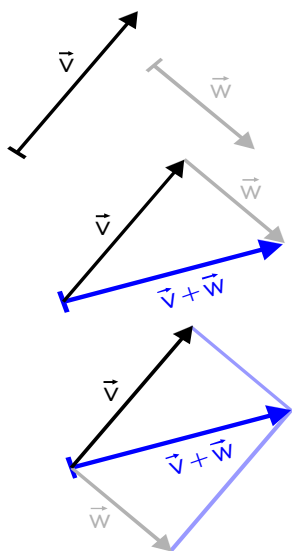
Exercicio 4.2:

Imaxina que te atopas no punto de coordenadas (-1,6) e destrázaste ata o punto (5,-2)

- ¿Que distancia percorrestes?
- ¿Como podes describir ese desprazamento? ¿Chegaría con dicir a distancia que percorrestes?
- Atopa o vector que describe ese desprazamento.

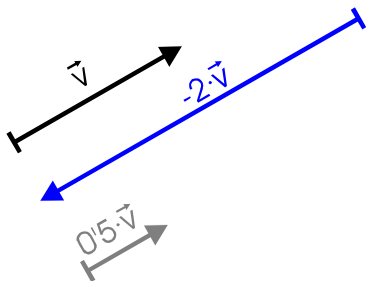
Suma de vectores

Para sumar dous vectores poñemos un a continuación do outro facendo coincidir a orixe do segundo co extremo do primeiro. A



Regra do paralelogramo

Son as mesmas propiedades que verifica a suma de números polo que poderemos operar cos vectores do mesmo xeito.



suma será o vector que vai da orixe do primeiro ó extremo do segundo.

Tamén podemos utilizar a **regra do paralelogramo**, neste caso sitúanse cas orixes en común e complétase o paralelogramo. A suma será o vector que forma a diagonal do paralelogramo. Pódese comprobar facilmente que a suma de vectores verifica as seguintes propiedades:

- 1 **Conmutativa.** Sexan \vec{v} e \vec{w} vectores, entón: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- 2 **Asociativa.** Dados \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , entón: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3 **Existe neutro** (por convenio consideramos a existencia dun vector de módulo 0 que chamaremos $\vec{0}$). Calquera que sexa o vector \vec{v} , entón $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- 4 **Todo vector ten oposto** (o oposto dun vector é outro vector que ten a mesma dirección e o mesmo módulo pero o sentido contrario, noméase cun signo “-“): $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

Produto dun número por un vector

O produto dun número por un vector é outro vector que ten:

Módulo: O produto do módulo do vector polo número.

Dirección: A mesma que a do vector de partida.

Sentido: Igual ó do vector orixinal se o número é positivo e contrario se é negativo.

Ó produto dun número por un vector tamén se lle chama *produto por escalares*³.

O produto por escalares verifica as seguintes propiedades:

5. **Distributiva da suma de números:** $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
(fíxate que a suma do primeiro membro é unha suma de números e a do segundo unha suma de vectores).
6. **Distributiva da suma de vectores:** $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$
7. **Asociativa:** $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ (no primeiro membro hai dous produtos de números por vectores e no segundo un produto de números e outro de un número por un vector).
8. **Produto pola unidade:** $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (un vector por 1 é o mesmo vector)

³ Escalares=en escada, este termo indica que os números podemos ordenados de maior a menor, mentres os vectores non, xa que non é posible comparar vectores con direccións diferentes (poderíamos comparar os seus módulos que son, precisamente, escalares).

9. **Produto por 0:** $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (un vector por 0 é o vector $\vec{0}$)
10. **Produto por -1:** $-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ (ó multiplicar por -1 un vector obtense o vector oposto).

Exercicio 4.3

Comproba as propiedades 9 e 10 a partir das anteriores utilizando as que che resulten convenientes.

Unha consecuencia fundamental da definición de produto dun número por un vector é que, se dous vectores non nulos teñen a mesma dirección, entón dun podemos obter o outro multiplicado por un número conveniente:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} = a \cdot \vec{w} \\ \vec{w} = b \cdot \vec{v} \end{cases}$$

O número polo que debemos multiplicar é o cociente dos módulos, con signo positivo se teñen o mesmo sentido ou negativo se os sentidos son contrarios.

Se non teñen a mesma dirección, eso non podería facerse, e diremos que os vectores son independentes.

Debemos considerar aparte ó vector $\vec{0}$ xa que para todo vector \vec{v} , $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$ pero non $\vec{v} = a \cdot \vec{0}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

Exercicio 4.4

Comproba cales dos seguintes pares de vectores teñen a mesma dirección: (-6,9) e (4,-6), (2,0) e (0,-6), (8,4) e (-2,-1), (5,15) e (2, 7).

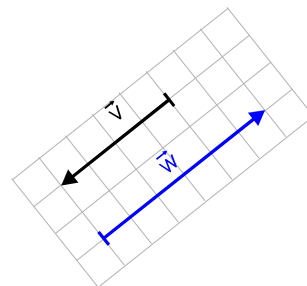
Combinación linear de vectores

As ideas de suma de vectores e o poder expresar un vector como produto dun número por outro coa mesma dirección preséntannos a posibilidade de construír calquera vector a partir duns poucos, combinándoos axeitadamente.

Se eliximos dous vectores do plano que non teñan a mesma dirección, \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , calquera outro vector do plano \vec{v} pode poñerse como combinación deles.

Para facelo só temos que trazar pola orixe e o extremo de \vec{v} rectas coa dirección de \vec{e}_1 e \vec{e}_2 respectivamente:

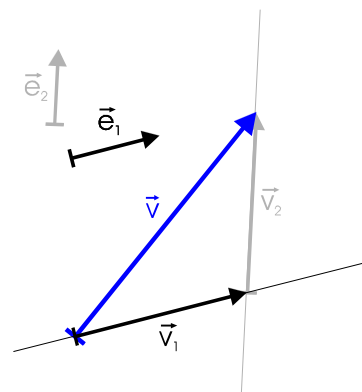
$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 \parallel \vec{e}_1 &\Rightarrow \vec{v}_1 = a \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v}_2 \parallel \vec{e}_2 &\Rightarrow \vec{v}_2 = b \cdot \vec{e}_2 \end{aligned} \right\} \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$$



Os vectores da figura teñen a mesma dirección. Os seus módulos son 4 e 6, polo tanto:

$$\vec{v} = -\frac{4}{6} \vec{w} \text{ e } \vec{w} = -\frac{6}{4} \vec{v}$$

(O signo negativo débese a que os vectores teñen sentidos contrarios).



Diremos que $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é unha **base** dos vectores do plano e ós números a e b chamáremoslles **compoñentes** de \vec{v} en relación a esa base. Escribiremolo $\vec{v} = (a, b)$.

En xeral, chámase **combinación linear** dun conxunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ a unha suma deses vectores multiplicados por números: $a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n$.

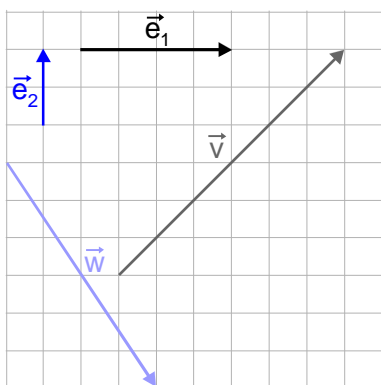
Diremos que un conxunto de vectores é linearmente independente se a única combinación linear súa que da o vector $\vec{0}$ é a que ten tódolos coeficientes 0:

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \text{ independentes} \Leftrightarrow a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \dots \\ a_n = 0 \end{cases}$$

Son dependentes cando algún dos coeficientes da combinación linear non é 0.

Exercicio 4.5

- Constrúe \vec{v} e \vec{w} a partir de \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . Escribe as compoñentes.
- Elixte outra base diferente e constrúe con ela \vec{v} e \vec{w} . Escribe as compoñentes.
- Comproba que \vec{v} e \vec{w} son independentes.



Operacións e compoñentes

Referíndonos a unha base fixa, podemos considerar cada vector como un par de números (as súas compoñentes). Desta maneira as operacións con vectores redúcense a operacións con números.

Exemplos: $\vec{v} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 \equiv (2, 3)$ $\vec{w} = -1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \equiv (-1, 1)$

Suma de vectores:

$$\vec{v} + \vec{w} = (2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2) + (-1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2) = (2-1)\vec{e}_1 + (3+1)\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

Ou, simplemente: $\vec{v} + \vec{w} = (2-1, 3+1) = (1, 4)$

En xeral:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \\ \vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 \end{array} \right\} \vec{v} + \vec{w} = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) + (w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2)$$

$$\xrightarrow{\text{reordenando}} = (v_1 + w_1) \cdot \vec{e}_1 + (v_2 + w_2) \cdot \vec{e}_2$$

Ou súmanse compoñente a compoñente:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Produto por un número:

$$5 \cdot \vec{v} = 5 \cdot (1'5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2) = 7'5 \cdot \vec{e}_1 + 15 \cdot \vec{e}_2 \equiv (7'5, 15)$$

$$5 \cdot \vec{v} = 5 \cdot (1'5, 3) = (7'5, 15)$$

En xeral:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \rightarrow a \cdot \vec{v} = a \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = av_1 \vec{e}_1 + bv_2 \vec{e}_2$$

Ou multiplícanse cada compoñente:

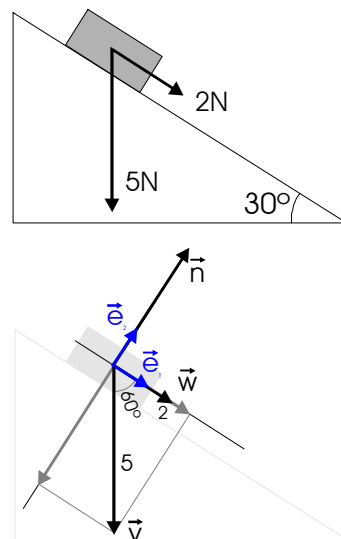
$$a \cdot \vec{v} = a \cdot (v_1, v_2) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)$$

Exemplo:

A un obxecto de 5 N de peso situado nun plano inclinado dáselle un impulso inicial de 2 N. Se o plano forma un ángulo de 30° en relación á horizontal ¿Cal é a forza resultante que actúa sobre o obxecto?

Solución: Para facilitar os cálculos, referimos os vectores a unha base. Eliximos \vec{e}_1 e \vec{e}_2 axeitados ó problema (na dirección do movemento e perpendicular ó plano) e calculamos as compoñentes do peso e do impulso en relación a eles.

- Peso: $\vec{v} = 5 \cos(60) \cdot \vec{e}_1 - 5 \sin(60) \cdot \vec{e}_2 \equiv (2'5, -4'33)$
- Normal: $\vec{n} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 5 \sin(60) \cdot \vec{e}_2 \equiv (0, 4'33)$
- Impulso: $\vec{w} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \equiv (2, 0)$
- Resultante: $\vec{v} + \vec{n} + \vec{w} = (2'5, -4'33) + (0, 4'33) + (2, 0) = (4'5, 0)$



Vectores coa mesma dirección

Se dous vectores teñen a mesma dirección, as súas compoñentes son proporcionais:

$$(v_1, v_2) \parallel (w_1, w_2) \Leftrightarrow (v_1, v_2) = a \cdot (w_1, w_2) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = a \cdot w_1 \\ v_2 = a \cdot w_2 \end{cases}$$

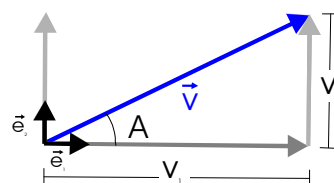
Consecuencia do anterior é que dous vectores teñen a mesma dirección se e só se a razón entre as súas compoñentes é a

$$\text{mesma: } (v_1, v_2) \parallel (w_1, w_2) \quad (v_1, w_1 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$$

(Excluimos $v_1=0$ e $w_1=0$ para evitar a división entre 0, xa que non é posible).

Pendente dun vector: Sexa $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$,

chámase pendente de \vec{v} ao número: $m = \frac{v_2}{v_1}$ (Excluimos $v_1=0$)



A pendente dun vector é a tanxente do ángulo que forma co primeiro elemento da base.

para evitar a división entre 0, xa que non é posible).

A pendente é a tanxente do ángulo que forma o vector co primeiro elemento da base e indica a dirección do vector

Vectores e coordenadas.

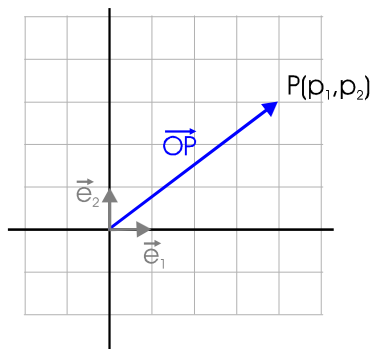
Para introducir coordenadas no plano debemos:

1. Elixir a orixe de coordenadas.
2. Elixir unha base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (dous vectores con distinta dirección). É preferible que os vectores sexan perpendiculares e de módulo 1, nese caso diremos que é unha **base ortonormal**.
3. As coordenadas dun punto son as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto en relación a \vec{e}_1 e \vec{e}_2

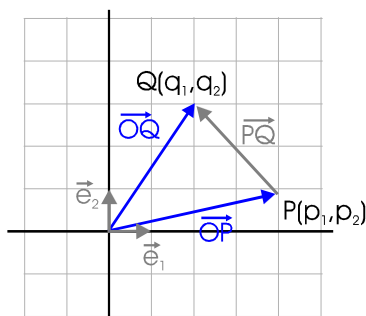
$$P(p_1, p_2)$$

$$\vec{OP} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{OP} = (p_1, p_2)$$

O vector que vai da orixe de coordenadas ó punto recibe o nome de **vector de posición do punto**. Deste xeito podemos entender o par (p_1, p_2) como as coordenadas do punto P ou como compoñentes do vector \vec{OP} , xa que ámbolos dous obxectos, punto e vector de posición, quedan identificados.



Elexindo \vec{e}_1 e \vec{e}_2 perpendiculares e de módulo 1 (base ortonormal), as coordenadas vectoriais coinciden coas cartesianas.



Vector que vai dun punto a outro

Calcúlase restando o vector de posición do extremo menos o da orixe.

$$\left. \begin{array}{l} P(p_1, p_2) \\ Q(q_1, q_2) \end{array} \right\} \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

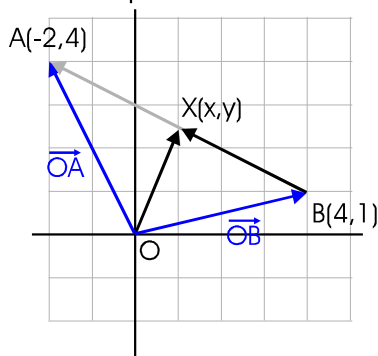
$$\vec{PQ} = (q_1, q_2) - (p_1, p_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$$

Exemplo:

Calcula o punto medio do segmento de extremos A(-2,4) e B(4,1).

Solución: Sexa X o punto medio de AB. Calcular as coordenadas do punto equivale a calcular as compoñentes do seu vector de posición.

$$\vec{OX} = \vec{OB} + \vec{BX} = \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BA} = (4,1) + \frac{1}{2} [(-2,4) - (4,1)] = (1,2.5)$$



Outro xeito de resolver o problema é tendo en conta que o vector \overrightarrow{AX} ten que ser a metade do vector \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Rightarrow (x, y) - (4, 1) = \frac{1}{2} [(-2, 4) - (4, 1)]$$

$$(x, y) = (4, 1) + \frac{1}{2} [(-2, 4) - (4, 1)] = (1, 2.5)$$

Exercicio 4.6

- Calcula, polos dous procedementos anteriores, o punto medio do segmento de extremos A(0,5) e B(5,0).
- Deducir unha fórmula xeral para o punto medio dun segmento.

Exemplo:

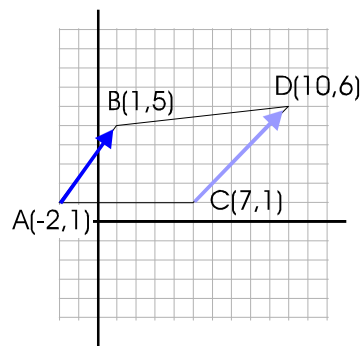
¿Forman os puntos A(-2,1), B(1,5), C(7,1) e D(10,6) os vértices dun paralelogramo?

Solución: Un paralelogramo é un cuadrilátero que ten os lados paralelos dous a dous. Polo tanto, os vectores que forman os lados opostos teñen que ser iguais ou opostos (teñen a mesma dirección e o mesmo módulo).

É un paralelogramo si e só si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

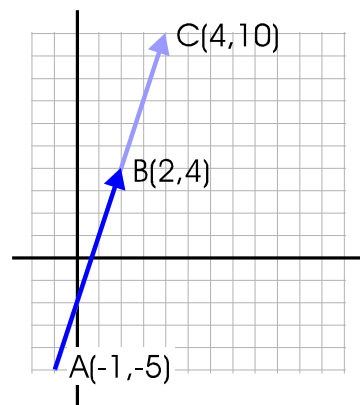
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,5) - (-2,1) = (3,4) \\ \overrightarrow{CD} = (10,6) - (7,1) = (3,5) \end{array} \right\} \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$$

Polo tanto, non forman un paralelogramo.



Exercicio 4.7

Atopa outro punto que forme cos A(-2,1), B(1,5) e C(7,1) do exemplo anterior os vértices dun paralelogramo. ¿Hai máis dunha solución?



Puntos aliñados

Dise que varios puntos están aliñados se están nunha mesma recta. Isto permite ir dun calquera a outro seguindo sempre a mesma dirección.

Exemplo:

Comproba se os puntos A(-1,-5), B(2,4) e C(4,10) están aliñados.

Solución: se están aliñados $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,9) \\ \overrightarrow{AC} = (5,15) \end{array} \right\} (3,9) = a(5,15) \Leftrightarrow (3,9) = (5a,15a)$$

Para que dous vectores sexan iguais, teñen que ser iguais compoñente a compoñente:

$$(3,9) = (5a,15a) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5} \\ 9 = 15a \Rightarrow a = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Dado que obtemos o mesmo valor de a para as dúas compoñentes, os vectores teñen a mesma dirección e, polo tanto, os tres puntos están sobre unha recta.

Exercicio 4.8

Comproba se $A(-2,5)$, $B(4,1)$ e $C(7,-2)$ están aliñados.

Exemplo:

Nun certo intre da súa travesía, un barco está situado no punto de coordenadas $(2,9)$. Se a súa velocidade é tal que cada hora efectúa un desprazamento dado polo vector $(2,-3)$, pídese:

¿En que punto se atopará o cabo de 1 hora? ¿E de 2 horas? ¿E de t horas?

¿Qué tipo de traxectoria segue o barco?

Solución:

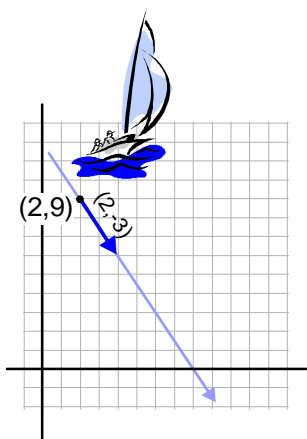
Despois de 1 hora: $(x, y) = (2,9) + (2,-3) = (4,6)$

Despois de 2 horas: $(x, y) = (2,9) + 2 \cdot (2,-3) = (6,3)$

Despois de t horas: $(x, y) = (2,9) + t \cdot (2,-3)$ (*)

A traxectoria é unha recta. De feito a expresión (*) é un xeito de expresar a ecuación desa recta, facendo operacións resulta:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 9 - 3t \end{cases} \begin{cases} t = \frac{x-2}{2} \\ t = \frac{y-9}{-3} \end{cases} \rightarrow \frac{y-9}{-3} = \frac{x-2}{2} \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 12$$



Ecuación vectorial dunha recta

Dado un punto $P(p_1, p_2)$ dunha recta e un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ coa mesma dirección da recta, entón a expresión:

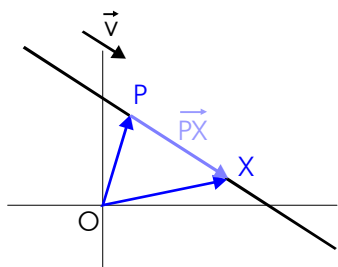
$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2) \quad (t \text{ un parámetro con valores en } \mathbb{R})$$

describe os puntos da recta: ó darlle valores a t obtemos os puntos da recta e só os da recta.

Demostración: Debemos comprobar

i) Que calquera punto da recta cumpre esa ecuación:

$$\text{Sexa } X(x,y) \text{ un punto da recta, entón: } \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$



Por seren P e X puntos da recta, o vector \overrightarrow{PX} ten a mesma dirección ca recta e, polo tanto, que $\vec{v}(v_1, v_2)$:

$$\overrightarrow{PX} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = t \cdot \vec{v} \text{ (sendo } t \text{ un certo número real)}$$

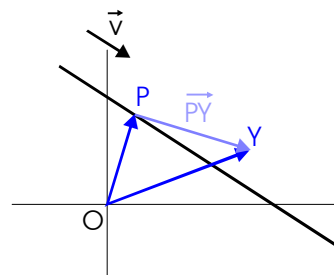
Substituíndo: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$

Por compoñentes: $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$

Esa expresión recibe o nome de **ecuación vectorial da recta** e o vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ **vector de dirección da recta**.

- ii) Que só cumpren esa expresión os puntos da recta: Se $Y(x', y')$ non é un punto da recta $\overrightarrow{PY} = (x' - p_1, y' - p_2)$ non é paralelo a $\vec{v} = (v_1, v_2)$: non hai ningún número t tal que:

$$(x' - p_1, y' - p_2) = t(v_1, v_2) \Rightarrow \begin{cases} x' = p_1 + t \cdot v_1 \\ y' = p_2 + t \cdot v_2 \end{cases}$$



Outras ecuacións da recta

Facendo transformacións na ecuación vectorial da recta podemos expresar esa ecuación de diversas maneiras:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2) \rightarrow (x, y) = (p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2)$$

Igualando as compoñentes resulta:

$$\left. \begin{aligned} x &= p_1 + t \cdot v_1 \\ y &= p_2 + t \cdot v_2 \end{aligned} \right\} \text{ Ecuacións paramétrica da recta}$$

Despexando t e igualando:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \quad \text{Ecuación continua da recta.}$$

Operando e traspoñendo termos obtemos a **ecuación xeral**:

$$v_2 x - v_1 y + p_2 v_1 - p_1 v_2 = 0 \xrightarrow[\substack{v_2=A \\ -v_1=B \\ p_2 v_1 - p_1 v_2 = C}]{} Ax + By + C = 0$$

Despexando y resulta a coñecida **ecuación explícita**:

$$y = \frac{v_2}{v_1} x + \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1} \xrightarrow[\substack{\frac{v_2}{v_1} = a \\ \frac{p_2 v_1 - p_1 v_2}{v_1} = b}]{} y = ax + b$$

Hai que ter en conta que, dependendo de cal sexa o vector de dirección, algunhas destas ecuacións (continua, explícita) pode non existir xa que non podemos dividir entre 0.

Exemplo:

Ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(5,3).

Solución: Para a ecuación vectorial necesitamos un punto da recta (podemos elixir A ou B) e un vector de dirección (usaremos o vector

$$\overrightarrow{AB}): \overrightarrow{AB} = (5,3) - (3,7) = (2,-4) \quad r \equiv (x,y) = (5,3) + t(2,-4)$$

Podemos ir transformando a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array} \right\} \xrightarrow{1^a) \cdot 2 + 2^a)} 2x + y = 13 \rightarrow y = -2x + 13$$

Exercicio 4.9

Busca as outras ecuacións da recta anterior.

Exemplo:

Atopa a ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(5,7).

Solución: vector de dirección: $\overrightarrow{AB} = (5,7) - (3,7) = (2,0)$

Ecuación vectorial da recta: $r \equiv (x,y) = (3,7) + t(2,0)$

Transformamos a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 0t \end{array} \right\} \xrightarrow{2^a)} y = 7$$

Exemplo:

Atopa a ecuación da recta que pasa por A(3,7) e B(3,3).

Solución: Vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (3,3) - (3,7) = (0,-7)$.

Ecuación vectorial: $r \equiv (x,y) = (3,3) + t(0,-7)$

Podemos ir transformando a ecuación vectorial ata obter a explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 0t \\ y = 3 - 7t \end{array} \right\} \xrightarrow{1^a)} x = 3$$

Neste caso trátase dunha recta vertical e NON ten ecuación explícita.

Exercicio 4.10

Busca tódalas ecuacións posibles da recta que pasa polos puntos A(-2, 3) e B(5, 3).

Exercicio 4.11

Atopa a ecuación xeral da recta que pasa polo punto A(2,-4) e é paralela á recta $y=2x+3$.

Intersección e paralelismo

Trátase de estudar a posición relativa de dúas rectas no plano a partir das súas ecuacións. Pódense dar tres casos distintos:

- **Cortarse nun punto.**
- **Paralelas:** Cando teñen a mesma dirección. Son paralelas en *sentido estricto* se non teñen puntos comúns.

- **Coincidentes:** As rectas son a mesma. Pode considerarse un caso de paralelismo en sentido non estricto.

Temos dous xeitos de estudar a posición relativa de dúas rectas a partir das súas ecuacións:

- 1 **Comprobar se as direccións son as mesmas** (mediante as pendentes, os coeficientes das ecuacións xerais ou os vectores de dirección). Deste xeito non sempre é doado distinguir entre rectas paralelas (en senso estricto) e coincidentes.
- 2 **Resolver o sistema formado polas súas ecuacións**
 - a) **Solución única:** as rectas córtanse nun punto.
 - b) **Moitas solucións:** as rectas son coincidentes.
 - c) **Sen solución:** rectas paralelas en sentido estricto.

Exemplo:

Estudiar a posición relativa dos pares de rectas:

- a) $r \equiv (x, y) = (2, -1) + t(-1, 3)$ e $s \equiv y = -3x + 2$
- b) $r \equiv 2x - 4y + 1 = 0$ e $s \equiv y = -3x + 2$
- c) $r \equiv (x, y) = (0, 1) + t(2, -5)$ e $s \equiv -10x - 4y + 4 = 0$

Solución:

- a) **1º método:** Comparamos as direccións das rectas mediante as súas pendentes. En r , $(-1, 3)$ é un vector de dirección e a súa pendente coincide coa da recta. En s a pendente é -3 :

$$\left. \begin{array}{l} m_r = \frac{3}{-1} = -3 \\ m_s = -3 \end{array} \right\} \text{As pendentes coinciden, son paralelas}$$

2º método: Estudiamos a intersección das rectas pasando as ecuacións á forma xeral ou á explícita. Un punto común verificaría as dúas ecuacións, logo sería unha solución do sistema:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 3x + y = 5 \\ s \equiv y = -3x + 2 \end{array} \right\} 3x + (-3x + 2) = 5 \rightarrow 2 = 5$$

Chegamos a unha contradicción ($2=5$), polo tanto as rectas non se cortan. Son paralelas en sentido estricto.

- b) Calculamos os puntos de corte:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 2x - 4y = 2 \\ s \equiv 3x + y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1^a) + (2^a) \cdot 4} 14x = 14 \rightarrow x = 1$$

$$3 \cdot 1 + y = 2 \rightarrow y = 2 - 3 = -1$$

Córtanse en $(1, -1)$

c) 1º método:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -5) \rightarrow m_r = \frac{-5}{2} \\ \vec{v}_s = (-B, A) \rightarrow m_s = \frac{-10}{4} \end{array} \right\} \frac{-5}{2} = \frac{-10}{4} \text{ Son paralelas}$$

2º método:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv 5x + 2y = 2 \\ s \equiv -10x - 4y = -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{1^a) \cdot 2 + 2^a)} 0 = 0$$

Sempre certo para calquera x e y, o sistema ten infinitas solucións, as rectas son a mesma.

En realidade non era necesario resolver o sistema, só cumpría decatarse de que os coeficientes da segunda ecuación son proporcionais ós da primeira.

Exercicio 4.12

a) Estudira posición relativa das rectas: $r \equiv (x, y) = t(1, -3)$ e $s \equiv y = -3x + 1$

b) Representa as rectas $y = 2$ e $y = 5$. Dá o valor da pendente de cada unha. Dá un vector dirección para cada unha delas.

Ampliación

O postulado das paralelas

O axioma V de Euclides equivale a que por un punto exterior a unha recta pode trazarse unha e só unha paralela. Pero o seu enunciado orixinal era moito máis complexo, fronte á sinxeleza dos demais e, xa desde os tempos da Grecia Clásica, foi obxecto de controversias. Era realmente un axioma ou podía deducirse a partir dos anteriores?

Tódolos intentos de demostralo a partir dos demais axiomas foron errados, polo que se mantivo como un problema sen resolver ata o século XIX.

O matemático Farkas Bolyai, que dedicou parte da súa vida a tentar demostrar o postulado das paralelas, díxolle ó seu fillo Janos cando descubriu que el tamén estaba obsesionado co mesmo problema: “Por amor de Deus, prégoo: esquece, témeo como as paixóns sensuais porque, o mesmo que elas, pode chegar a absorber o teu tempo e a privarte da saúde, da paz de espírito e da felicidade”.

O matemático Nicolai Lobachewsky (1793-1856) adoptou un enfoque diferente⁴. En lugar de tentar demostrar o postulado das paralelas, construíu unha xeometría na que se incluía un postulado alternativo ó das paralelas: por un punto exterior a unha recta poden trazarse varias rectas paralelas a ela.

A xenialidade de Lobachewsky é doada de entender: se o axioma V non depende dos outros pode construírse unha xeometría coherente que non o cumpra e, se depende deles, esa xeometría tería contradicións internas.

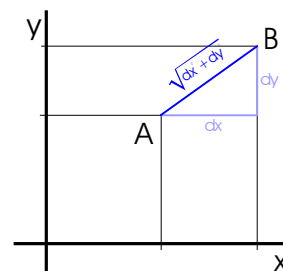
A xeometría de Lobachewsky é coherente, o que demostra que o axioma V non depende dos outros. É certamente unha xeometría estraña, á que chamou “xeometría imaxinaria”.

Estas ideas supuxeron un cambio enorme. A xeometría deixou de ser unha escrava do mundo físico para transformarse no estudio dun universo abstracto rexido polas súas propias leis lóxicas.

Berhard Riemann (1826-1866), o gran matemático alemán, foi aínda máis lonxe. Consideraba que a xeometría non debía estudar puntos e rectas no sentido habitual, senón conxuntos n-plas (coordenadas de puntos nun espazo de dimensión n) que se combinan seguindo certas leis⁵. A xeometría euclídea é un caso particular desas novas xeometrías.

Riemann destacaba a importancia da definición de distancia entre dous puntos moi próximos a partir do módulo do vector que vai dun punto ó outro. Na xeometría euclídea o módulo dun vector do plano

(x,y) calcúlase mediante a expresión: $|(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Paro esa é só unha das infinitas fórmulas posibles para calculalo. Unha fórmula máis xeral

⁴ Janos Bolyai (1802-1860) chegou, de xeito independente, as mesmas conclusións que Lobachewsky nun traballo publicado como apéndice a outro do seu pai, pero atopouse coa falla de recoñecemento público o que o levou a non publicar nada máis.

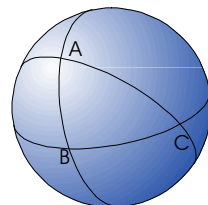
⁵ Nesta unidade, se esqueces as referencias ó plano, estudas conxuntos de pares (x,y) nun espazo de dimensión 2 e que se combinan seguindo certas leis, tal como propoñía Riemann.

sería:

$$|(x,y)| = \sqrt{ax^2 + by^2 + cxy} \quad a, b \text{ e } c \text{ números ou funcións.}$$

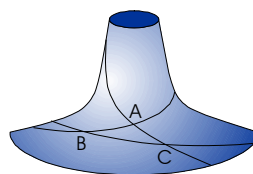
Podemos construír modelos que nos permitan entender mellor esas xeometrías.

Xeometría esférica: Interpretamos o plano como a superficie dunha esfera e as rectas como círculos máximos sobre esa esfera (nesta xeometría non hai paralelas a unha recta por un punto exterior e os ángulos dun triángulo suman máis de 180°).



Os ángulos A, B e C suman máis de 180°

Xeometría hiperbólica: Considerando o plano como a superficie dun hiperboloide de revolución e as rectas como xeodésicas sobre ela (infinitas paralelas a unha recta por un punto exterior e os ángulos dun triángulo suman menos de 180°).



Os ángulos A, B e C suman menos de 180°

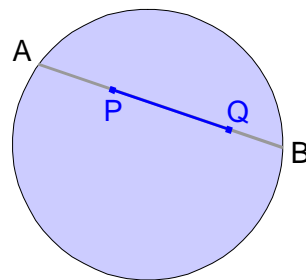
Xeometría de Klein: Un exemplo máis simple é o modelo hiperbólico de Klein (1849-1925) no que o plano é o interior dun círculo e unha recta o segmento (sen extremos) de recta contido nese círculo. A distancia entre dous puntos obtense mediante a

expresión: $d(P,Q) = \text{Ln} \left(\frac{AQ \cdot PB}{AP \cdot QB} \right)$ ⁽⁶⁾

Problema 4.1:

Na xeometría de Klein

- Verifícase o postulado V de Euclides? Xustifica a resposta.
- Calcula a distancia entre dous puntos, un situado no centro e outro próximo ó centro (para simplificar, podes supoñer que están sobre un diámetro e que o radio do círculo é 1).
- Calcula a distancia entre un punto situado no centro e outro próximo ó borde do espazo.



Pode parecer que estas xeometrías só teñen un interese puramente teórico, que non poden utilizarse para describir o mundo físico, pero non é así.

O modelo do universo de Newton baséase na xeometría euclídea. É un modelo magnífico, que permite predicir a volta dun cometa despois de centos de anos, un eclipse, as mareas, ... a posición de tódolos astros do Sistema Solar con centos ou miles de anos de antelación e cunha gran precisión. É un modelo no que a luz viaxa seguindo unha liña recta no sentido tradicional.

Einstein construíu un modelo aínda mellor, un modelo no que os erros son menores e no que a luz tamén viaxa seguindo unha liña recta pero xa non son rectas no senso clásico, son as “liñas máis curtas” entre dous puntos e “cúrvanse” ao pasar cerca de obxectos con masa. O modelo de Einstein xa non se basea na xeometría euclídea, utiliza unha xeometría de Riemann.

⁶ Ln é unha operación chamada “logaritmo neperiano”, incluída nas calculadoras científicas. Para este problema só necesitas coñecer que $\text{Ln}(1)=0$ e que canto maior é o número, maior é o logaritmo neperiano. Pode que non o creas, pero a xeometría hiperbólica de Klein é moi semellante á euclídea, agás no V postulado.