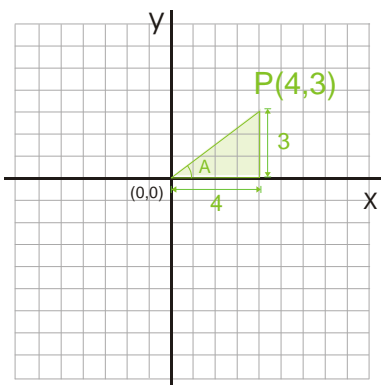


Unidade 4: solucións 1

Exercicio 4.1:

a) Cales son as coordenadas polares dos puntos (4,3), (-12,9), (-6,-8) e (8,-6)?
Representando o punto, formamos un triángulo rectángulo par acada caso, fixándonos no cuadrante onde cae:

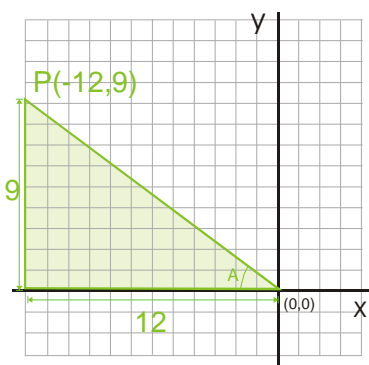


Por Pitágoras calculamos a hipotenusa:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Coa función inversa da calculadora (2nd, \tan^{-1}):

$$\tan A = \frac{3}{4} \rightarrow A = \arctan \frac{3}{4} = 36'87''$$

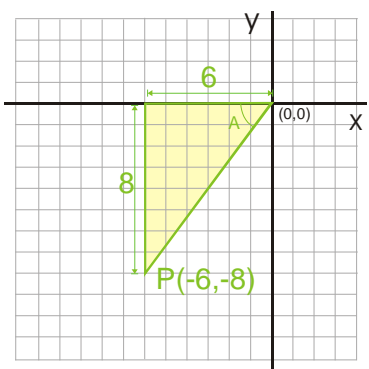


Por Pitágoras calculamos a hipotenusa:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

Coa función inversa da calculadora (2nd, \tan^{-1}):

$$\tan A = \frac{9}{-12} \rightarrow A = \arctan \frac{9}{-12} = 216'87''$$

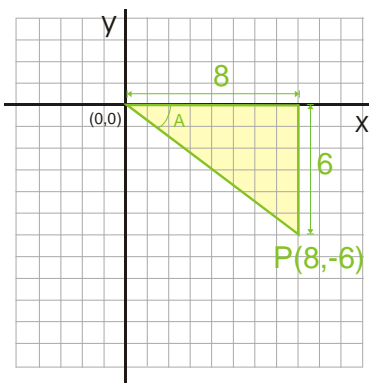


Por Pitágoras calculamos a hipotenusa:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Coa función inversa da calculadora (2nd, \tan^{-1}):

$$\tan A = \frac{-8}{-6} \rightarrow A = \arctan \frac{-8}{-6} = 233'13''$$



Por Pitágoras calculamos a hipotenusa:

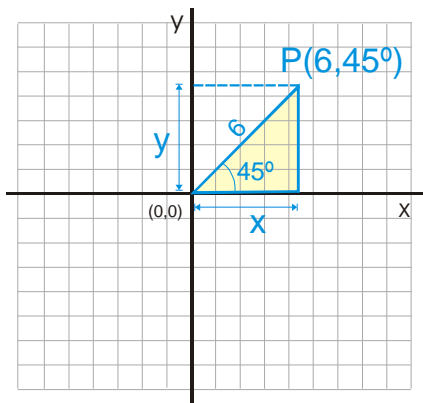
$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Coa función inversa da calculadora (2nd, \tan^{-1}):

$$\tan A = \frac{-6}{8} \rightarrow A = \arctan \frac{-6}{8} = 323'13''$$

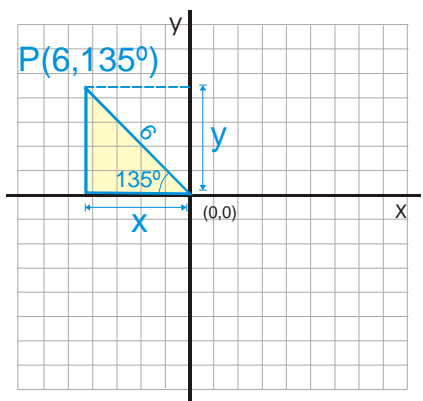
- b) Cales son as coordenadas cartesianas dos puntos de coordenadas polares $(6,45^\circ)$, $(6,135^\circ)$, $(6,225^\circ)$ e $(6,315^\circ)$

O proceso é inverso ao anterior. Debuxamos tamén o triángulo rectángulo, fixándonos no cuadrante (fíxate que todos están a unha distancia de 6 da orixe):



$$\cos 45^\circ = \frac{x}{6} = 0,7 \rightarrow x = 4,24$$

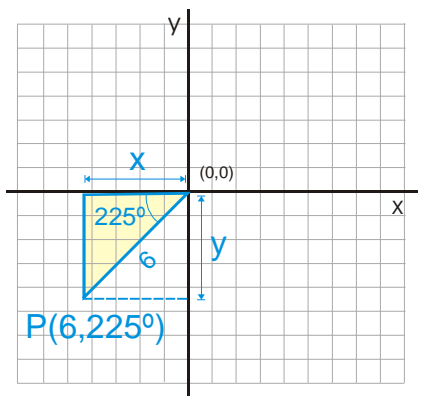
$$\sin 45^\circ = \frac{y}{6} = 0,7 \rightarrow y = 4,24$$



Reducindo o ángulo ao primeiro cuadrante temos 45°

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{6} = 0,7 \rightarrow x = 4,24 \quad \text{será } -4,24$$

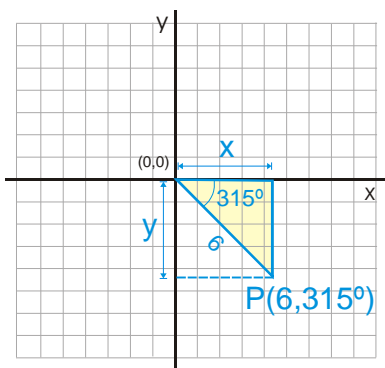
$$\sin 45^\circ = \frac{y}{6} = 0,7 \rightarrow y = 4,24 \quad \text{será } 4,24$$



Reducindo o ángulo ao primeiro cuadrante temos de novo 45°

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{6} = 0,7 \rightarrow x = 4,24 \quad \text{será } -4,24$$

$$\sin 45^\circ = \frac{y}{6} = 0,7 \rightarrow y = 4,24 \quad \text{será } -4,24$$



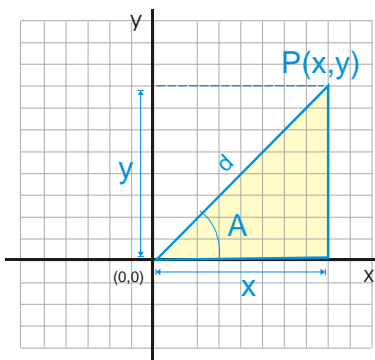
Reducindo o ángulo ao primeiro cuadrante temos de novo 45°

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{6} = 0,7 \rightarrow x = 4,24 \quad \text{será } 4,24$$

$$\sin 45^\circ = \frac{y}{6} = 0,7 \rightarrow y = 4,24 \quad \text{será } -4,24$$

- c) Atopa fórmulas que permitan cambiar automaticamente de coordenadas cartesianas a polares, e viceversa.

O que se nos propón é “escribir” o que vimos de facer pero sen utilizar números concretos.



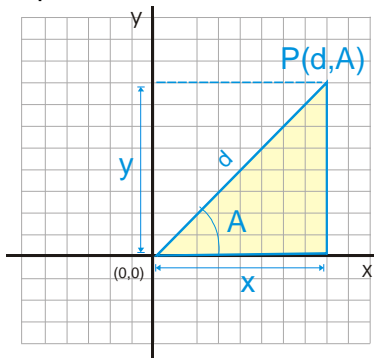
Por Pitágoras calculamos a hipotenusa:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Coa función inversa da calculadora (2^{nd} , \tan^{-1}):

$$\tan A = \frac{y}{x} \rightarrow A = \arctan \frac{y}{x}$$

O proceso inverso:



$$\cos A = \frac{x}{d} \rightarrow x = d \cdot \cos A$$

$$\sin A = \frac{y}{d} \rightarrow y = d \cdot \sin A$$

Exercicio 4.2

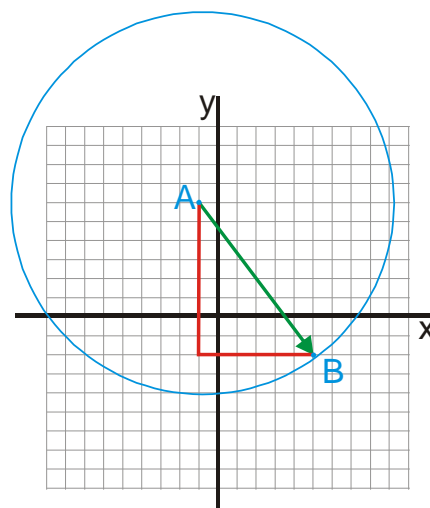
Imaxina que te atopas no punto de coordenadas (-1,6) e destrázaste ata o punto (5,-2)

- ¿Que distancia percorrestes?
- ¿Como podes describir ese desprazamento?
¿Chegaría con dicir a distancia que percorrestes?
- Atopa o vector que describe ese desprazamento.

Solución:

- Representemos a situación proposta. Observamos que a distancia percorrida é a hipotenusa dun triángulo rectángulo de catetos 6 e 8:
$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$
 (fíxate que ese é o xeito de calcular o módulo dun vector).
- Parece claro que non é suficiente con indicar o espazo percorrido (calquera punto da circunferencia podería ser o destino). Necesitamos tamén indicar a “dirección” na que se efectuou o desprazamento.
- O vector desprazamento son os cadros horizontais e verticais para ir dun punto ao outro: 6 horizontais (cara a “dereita”) e 8 verticais (cara “abaixo”) que podemos representar por (6,-8), un *vector*.

Repara en que os cadros “horizontais” e o sentido “dereita” e os cadros “verticais” e o sentido “abaixo” forman un sistema de referencia, unha *base*.



Unidade 4: solucións 2

Exercicio 4.3:

Comproba as propiedades 9 e 10 a partir das anteriores.

Propiedade 9, produto por 0: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (un vector por 0 é o vector $\vec{0}$)

$$\vec{v} \xrightarrow{8^a} 1 \cdot \vec{v} = (1+0) \cdot \vec{v} \xrightarrow{5^a} = 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} \xrightarrow{4^a} \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} + (-\vec{v}) \xrightarrow{1^a e 2^a} \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$$

Propiedade 10, produto por -1: $-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ (ó multiplicar por -1 un vector obtense o vector oposto). $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = (1-1) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Exercicio 4.4

Comproba cales dos seguintes pares de vectores teñen a mesma dirección: (-6,9) e (4,-6), (2,0) e (0,-6), (8,4) e (-2,-1), (5,15) e (2,7).

Solución: Lembra que se dous vectores teñen a mesma dirección, podemos escribir un como combinación do outro. Comprobemos cales o verifican:

$$(0,-6) = x(2,0) \xrightarrow{\text{por compoñentes}} \begin{cases} 0 = 2x \Rightarrow x = \frac{0}{2} \\ -6 = 0x \Rightarrow x = -\frac{6}{0} \end{cases}$$

Esas dúas ecuacións non poden ter solución simultaneamente, non podemos escribir o primeiro vector como combinación do segundo. Non teñen a mesma dirección.

$$(8,4) = x(-2,-1) \xrightarrow{\text{por compoñentes}} \begin{cases} 8 = -2 \cdot x \Rightarrow x = \frac{8}{-2} = -4 \\ 4 = -1 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4}{-1} = -4 \end{cases}$$

O primeiro vector é -4 veces o segundo. Os vectores teñen a mesma dirección.

$$(5,15) = x(2,7) \xrightarrow{\text{por compoñentes}} \begin{cases} 5 = 2 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2'5 \\ 15 = 7 \cdot x \Rightarrow x = \frac{15}{7} = 2'14 \end{cases}$$

As dúas ecuacións non poden ter solución simultaneamente. Non teñen a mesma dirección.

Exercicio 4.5

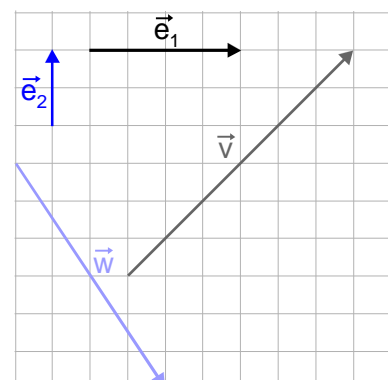
a) Constrúe \vec{v} e \vec{w} a partir de \vec{e}_1 e \vec{e}_2 . Escribe as compoñentes.

$$\vec{v} = 1'5 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 \quad \vec{w} = 1 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2$$

b) Elixo outra base diferente e constrúe con ela \vec{v} e \vec{w} . Escribe as compoñentes.

Se tomamos vectores da mesma dirección e sentido ca os anteriores, pero de módulo 1:

$$\vec{v} = 6 \cdot \vec{e}_1 + 6 \cdot \vec{e}_2 \quad \vec{w} = 4 \cdot \vec{e}_1 - 6 \cdot \vec{e}_2$$



c) Comproba que \vec{v} e \vec{w} son independentes.

A independencia xa ven garantida por teren direccións diferentes, porén imos practicar a idea

de que a única combinación linear que dá $\vec{0}$ é multiplicando os dous por 0.

$$\begin{aligned} a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = \vec{0} &\Rightarrow a \cdot (6\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2) + b \cdot (4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2) = (6a + 4b)\vec{e}_1 + (6a - 6b)\vec{e}_2 = \vec{0} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 0 \\ 6a - 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 6a + 0 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Exercicio 4.6

a) Calcula, polos dous procedementos anteriores, o punto medio do segmento de extremos A(0,5) e B(5,0).

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= \vec{OB} + \vec{BX} = \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BA} = (5,0) + \frac{1}{2}[(0,5) - (5,0)] = (5,0) + \frac{1}{2}[(-5,5)] = \\ &= (5,0) + (-2,5, 2,5) = (2,5, 2,5) \\ \vec{AX} &= \frac{1}{2} \vec{AB} \Rightarrow (x,y) - (0,5) = \frac{1}{2}[(5,0) - (0,5)] \\ (x,y) &= (0,5) + \frac{1}{2}[(5, -5)] = (2,5, 2,5) \end{aligned}$$

b) Deducir unha fórmula xeral para o punto medio dun segmento.

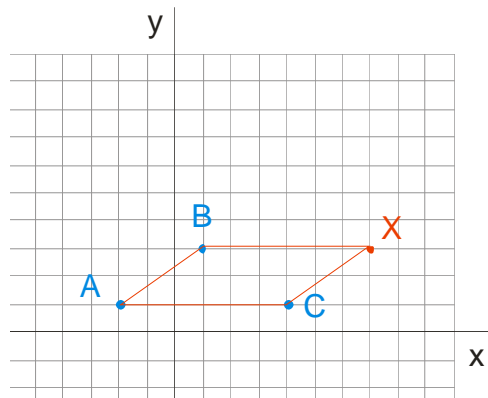
“Escribimos” o que acabamos de facer sen utilizar números concretos: A(a_1, a_2) e B(b_1, b_2)

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= \vec{OB} + \vec{BX} = \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BA} = (b_1, b_2) + \frac{1}{2}[(a_1, a_2) - (b_1, b_2)] = (b_1, b_2) + \frac{1}{2}[(a_1 - b_1), (a_2 - b_2)] = \\ &= (b_1, b_2) + \left[\frac{a_1 - b_1}{2}, \frac{a_2 - b_2}{2} \right] = \left[b_1 + \frac{a_1 - b_1}{2}, b_2 + \frac{a_2 - b_2}{2} \right] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] \\ \vec{AX} &= \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} \Rightarrow (x, y) - (a_1, a_2) = \frac{1}{2}[(b_1, b_2) - (a_1, a_2)] \Rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + \frac{1}{2}[(b_1 - a_1), (b_2 - a_2)] = \\ &= (a_1, a_2) + \left[\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2} \right] = \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2} \right] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] \end{aligned}$$

Exercicio 4.7

Atopa outro punto que forme cos A(-2,1), B(1,3) e C(4,1) do exemplo anterior os vértices dun paralelogramo. ¿Hai máis dunha solución?

Solución: completemos o paralelogramo. Para calcular o punto que falta debemos ter en conta que os vectores correspondentes a lados opostos deben ser iguais e que para calcular o vector que vai dun punto a outro réstanse as coordenadas do extremo menos as da orixe.

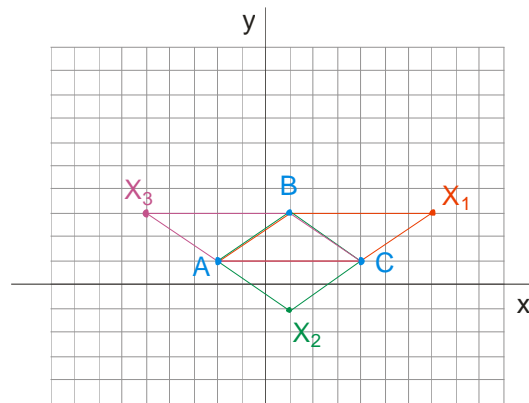


$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y) - (1, 3) = (4, 1) - (-2, 1) \rightarrow (x, y) - (1, 3) = (6, 0)$$

$$(x, y) = (6, 0) + (1, 3) \rightarrow (x, y) = (7, 3)$$

Completando o paralelogramo doutro xeito, obtemos diferentes solucións: $(-5, 3)$ e $(1, -1)$

Podes comprobar que as solucións forman un triángulo semellante ao formado polos puntos orixinais de tamaño dobre.



Exercicio 4.8

Comproba se $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ e $C(7, -2)$ están aliñados

Solución: se están aliñados, entón $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (9, -7) \end{array} \right\} \quad (6, -4) = a(9, -7) \Leftrightarrow (6, -4) = (9a, -7a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 = 9a \Rightarrow a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ -4 = -7a \Rightarrow a = \frac{-4}{-7} \neq \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Unidade 4: solucións 3

Exercicio 4.9

Busca as outras ecuacións da recta anterior.

- Ecuación xeral: $y = -2x + 13 \rightarrow 2x + y - 13 = 0$
- Ecuación continua: $\left. \begin{array}{l} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4}$

Exercicio 4.10

Busca tódalas ecuacións posibles da recta que pasa polos puntos A(-2, 3) e B(5, 3).
Para a ecuación vectorial necesitamos un punto da recta (podemos elixir A ou B) e un vector de dirección (usaremos o vector \overrightarrow{AB})

$$\overrightarrow{AB} = (5,3) - (-2,3) = (7,0) \rightarrow r \equiv (x,y) = (-2,3) + t(7,0) \text{ (Ec vectorial)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 + 7t \\ y = 3 \end{array} \right\} \text{ (Ec. paramétrica)}$$

A condición $y = 3$ (ec. explícita) impón que a ordenada (altura) dos puntos da recta é sempre 3: é unha recta horizontal.

Exercicio 4.11

Atopa a ecuación xeral da recta que pasa polo punto A(2,-4) e é paralela a $y=2x+3$.

Solución:

- Método 1:** podemos partir da ecuación continua para o que necesitamos un punto, A, e un vector de dirección, un da recta $y=2x+3$ (calquera que teña pendente 2) como (1,2): $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \rightarrow 2x - 4 = y + 4 \rightarrow 2x - y - 8 = 0$
- Método 2:** a ecuación explícita de rectas paralelas só se diferencia no termo independente. Buscamos pois unha recta da forma $y=2x+b$. Queremos que pase por (2,-4), polo que as coordenadas dese punto deben verificar a ecuación da recta: $-4 = 2 \cdot 2 + b \rightarrow b = -4 - 4 \rightarrow b = -8$
A ecuación buscada é: $y=2x-8$, en forma xeral $-2x+y+8=0$.

Exercicio 4.12

a) Estudira posición relativa das rectas: $r \equiv (x,y) = t(1,-3)$ e $s \equiv y = -3x + 1$

b) Representa as rectas $y = 2$ e $y = 5$. Dá o valor da pendente de cada unha. Dá un vector dirección para cada unha delas.

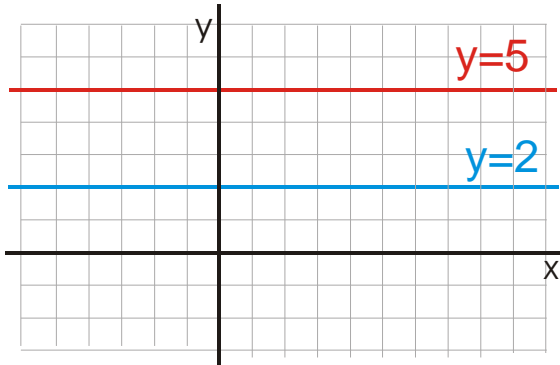
Solución:

a) Podemos desenvolver a primeira recta ata chegar á ecuación explícita:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -3t \end{array} \right\} \rightarrow y = -3x$$

Vemos que teñen a mesma pendente "-3", polo que son paralelas.

b) Representa as rectas $y = 2$ e $y = 5$. Dá o valor da pendente de cada unha.
Dá un vector dirección para cada unha delas.



Para $y = 2$ un vector dirección pode ser $\vec{v} = (1,0)$. A pendente é 0 (nin sube nin baixa)

Para $y = 5$ un vector dirección pode ser tamén $\vec{v} = (1,0)$. A pendente é 0 (nin sube nin baixa)