

Unidade 3: Trigonometría

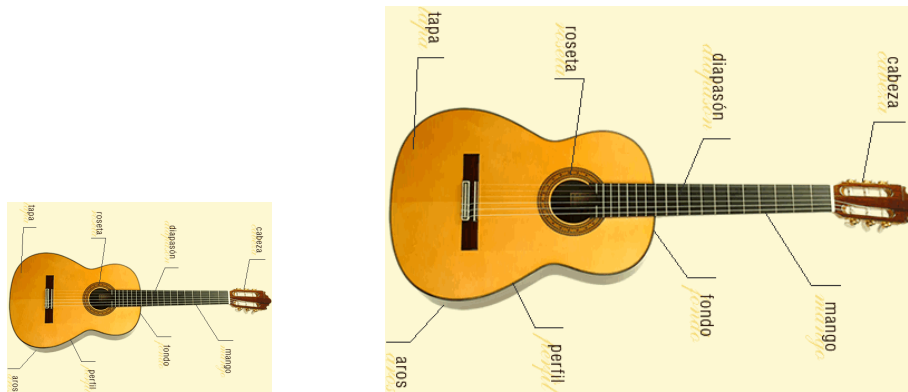
1. Figuras semellantes. Razón de semellanza.
2. Triángulos rectángulos
 - 2.1. Razóns trigonométricas: Seno, coseno e tanxente.
 - 2.2. A Fórmula Fundamental da Trigonometría.
3. Coordenadas rectangulares e polares. Xeralización da definición de razón trigonométrica.
4. Resolución de triángulos
 - 4.1. Teorema do seno
 - 4.2. Teorema do coseno

Introdución

Figuras semellantes.

Chámanse figuras semellantes as que teñen a mesma forma e diferente tamaño.

Cando reducimos ou ampliamos unha imaxe na fotocopiadora, estamos formando figuras semellantes:



A idea clave para conservar a forma é que se a facemos, por exemplo, o dobre de longa, terá que ser tamén o dobre de alta. (Ou triplo de longa, triplo de alta; ou vez e media de longa, vez e media de alta;...).

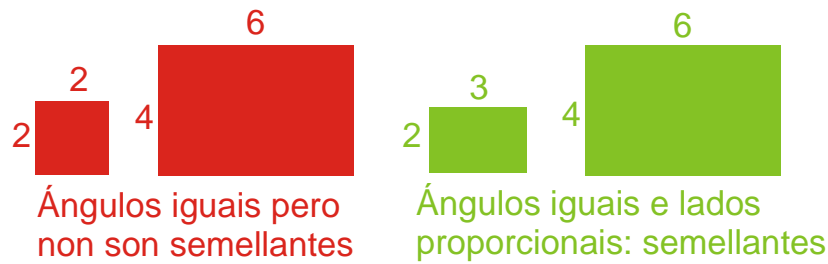
En xeral, calquera segmento da figura orixinal sufrirá a mesma transformación. No caso de ampliar ao dobre, tamén as cordas da guitarra serían o dobre de longas; a largura da caixa de resonancia sería tamén o dobre; o diámetro do círculo, sería o dobre; ...

Esa relación recibe o nome de **razón de semellanza** ($2:1 = 2$; $3:1 = 3$; $1'5:1 = 1'5$;...).

No caso dos triángulos, a forma ven determinada polos ángulos:

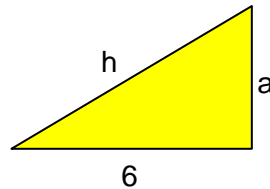
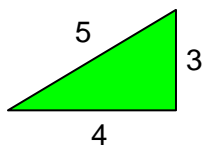


Pero nos demais polígonos, é necesario ter en conta tamén que os lados sexan proporcionais:

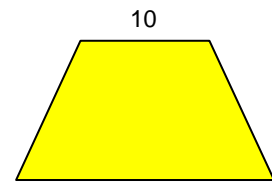
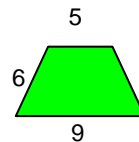


Actividade 3.1:

1) Calcula as medidas **a** e **h** do triángulo grande:



2) Calcula a altura do trapecio grande:



3) Canto mide a área dun cadrado de 1 m de lado?
E a área dun cadrado de 2m de lado?

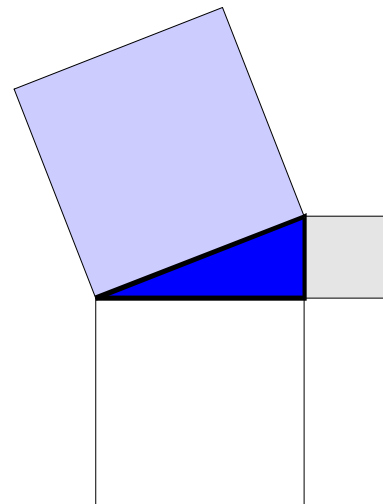
4) Cal é a razón de semellanza entre unha moeda de 10 cts de € e outra de 1€? Cal é a razón entre as súas áreas?

5) En xeral, a relación entre os lados de dúas figuras semellantes é a razón de semellanza pero, cal é a relación entre as áreas de figuras semellantes?

O Teorema de Pitágoras

Xa os antigos exipcios coñecían que algúns triángulos rectángulos (coma o de lados 5, 4 e 3) verifican que a área do cadrado construído sobre a hipotenusa era igual á suma das áreas dos cadrados construídos sobre os catetos ($5^2 = 4^2 + 3^2$).

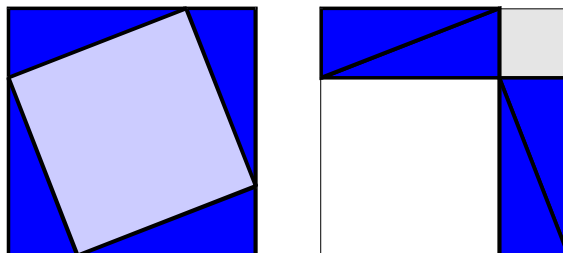
Foi sen embargo na Grecia Clásica onde se estableceu definitivamente que esa propiedade era característica de todos os triángulos rectángulos. É o chamado **Teorema de Pitágoras**, que non foi descuberto nin demostrado por Pitágoras, e que na actualidade enunciámos:



Un triángulo é rectángulo si e só si a área dun cadrado construído sobre a hipotenusa é igual a suma das áreas dos cadrados construídos sobre os catetos.

Un dos xeitos máis elegantes de demostrar o Teorema de Pitágoras consiste en construír dous cadrados de lado a suma dos catetos do triángulo e descompoñelos como aparece na figura.

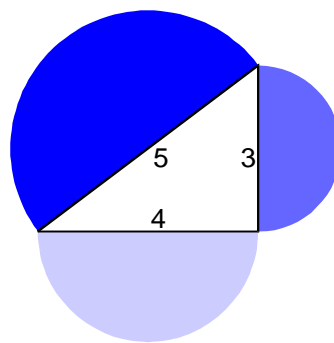
A área dos cadrados é a mesma polo que ó recortarlle os catro triángulos, as áreas que quedan seguen sendo iguais: Demostramos que o cadrado construído sobre a hipotenusa ten unha área igual á suma das áreas dos cadrados construídos sobre os catetos.



Podemos enunciar o teorema dun xeito máis xeral utilizando figuras semellantes de calquera tipo, non só cadrados.

Actividade 3.2:

Comproba se a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa do triángulo de lados 5, 4 e 3 é igual a suma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.



A Matemática de Euclides

Euclides (aprox 300 a.C.) recopilou nos **Elementos** todas as Matemáticas do seu tempo empregando, por primeira vez, unha estrutura deductiva: a partir de cinco postulados básicos vai deducindo teoremas, construíndo cada coñecemento a partir dos anteriores.

Problema 3.1:

Debuxa un triángulo rectángulo calquera apoiado na súa hipotenusa (se o prefires, podes empezar co triángulo de lados 3, 4 e 5 que é rectángulo pois verifica o teorema de Pitágoras) e traza a altura relativa á hipotenusa.

- Demostra que os triángulos rectangulos que se forman ao trazar esa altura son semellantes ao triángulo orixinal.
- Apoiándose nas relacións entre os lados deses triángulos semellantes, demostra o **Teorema do Cateto** que afirma que **“un cateto é media proporcional¹ entre a hipotenusa e a súa proxección ortogonal sobre ela”**.
- Apoiándose nas relacións entre os lados deses triángulos semellantes, demostra o **Teorema da Altura** que afirma que **“a altura relativa a hipotenusa nun triángulo rectángulo é media proporcional entre os trozos nos que divide á hipotenusa”**.

¹ O concepto **media proporcional** fai referencia a un número que, nunha proporción, aparece nas dúas fraccións. Por exemplo, 6 é media proporcional entre 12 e 3 pois $\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$.

En xeral, diremos que un número m é media proporcional de a e b se $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$

Unha curiosidade

Nunha superficie plana, a recta que une dous puntos é a liña máis curta entre eses puntos.

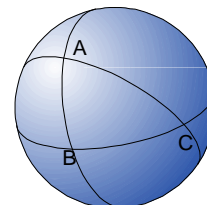
Podemos xeneralizar a definición de recta a calquera superficie partindo dese feito: Nunha superficie calquera, chamamos recta entre dous puntos á liña máis curta entre eses puntos.

Nunha esfera, a recta entre dous puntos é o círculo máximo (de centro o centro da esfera) que pasa por eses puntos.

De xeito semellante ás superficies planas, tres puntos non aliñados en calquera superficie forman os vértices dun triángulo que, en xeral, terá os lados curvilíneos.

No plano, a suma dos ángulos dun triángulo do plano é de 180° pero, se debuxas un triángulo enriba doutra superficie, a suma dos seus ángulos pode non ser 180° .

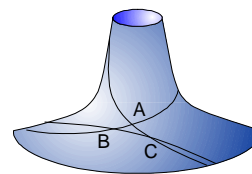
Nunha superficie esférica, como a Terra, a suma dos ángulos dun triángulo é maior de 180°



Os ángulos A, B e C suman máis de 180°

Nunha superficie hiperbólica (obtida ó facer xirar unha hipérbola ó redor dun eixe) os ángulos dun triángulo suman menos de 180° .

No espazo a recta entre dous puntos é o traxecto dun raio de luz entre eles (que non sempre é unha “recta” tal como demostrou Einstein). Se puidésemos medir con exactitude canto suman os ángulos dun triángulo no espazo coñeceríamos cal é a xeometría do noso Universo, se é aberto ou pechado, finito ou infinito.



Os ángulos A, B e C suman menos de 180°

Trigonometría

As razóns trigonométricas.

Definimos as razóns trigonométricas dun ángulo agudo A ($0^\circ \leq A \leq 90^\circ$) como as razóns entre os

lados dun triángulo rectángulo que ten un dos seus ángulos igual a A :

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{\text{cateto oposto a } A}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

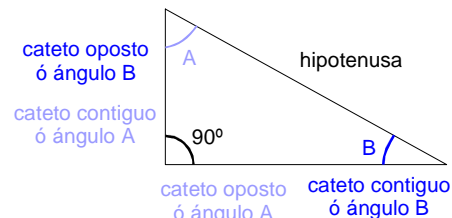
$$\cos(A) = \frac{\text{cateto contiguo a } A}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{cateto oposto a } A}{\text{cateto contiguo a } A} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cosec}(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto a } A} = \frac{h}{a}$$

$$\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo a } A} = \frac{h}{b}$$

$$\cotan(A) = \frac{\text{cateto contiguo a } A}{\text{cateto oposto a } A} = \frac{b}{a}$$

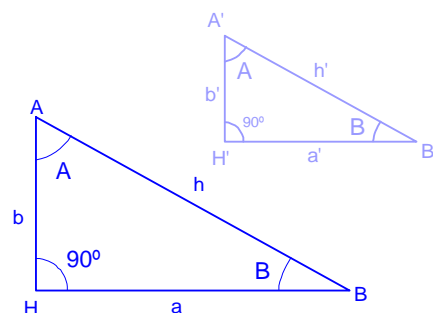


Temos que comprobar que as razóns trigonométricas non dependen do tamaño do triángulo elixido, só da súa forma (ángulos). É dicir, que os valores son os mesmos calquera que sexa o tamaño do triángulo.

Sexan dous triángulos rectángulos cun ángulo agudo igual a A . Eses triángulos son necesariamente semellantes por teren os ángulos iguais e, polo tanto, os seus lados son proporcionais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} = \operatorname{sen}(A)$$

↑
Invertindo os extremos
da proporción



Queda probado que o seno dun ángulo non depende do tamaño do triángulo, só dos ángulos agudos.

Actividade 3.3: demostra que as demais razóns trigonométricas tamén están ben definidas.

Algunhas propiedades

Se dividimos o seno dun ángulo polo seu coseno obtemos:

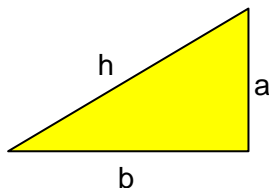
$$\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{a}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{a \cdot h}{b \cdot h} = \frac{a}{b} = \tan(A)$$

A tanxente dun ángulo é igual o seno dividido polo coseno.

Nun triángulo rectángulo, os ángulos agudos A e B son complementarios: $A+B=90$. Ademais, o cateto oposto ó ángulo A é o cateto contiguo ó ángulo B. Polo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \sin(A) &= \frac{a}{h} = \cos(B) \\ \cos(A) &= \frac{b}{h} = \sin(B) \end{aligned} \right\}$$

O seno dun ángulo é igual o coseno do complementario.



Fórmula Fundamental da Trigonometría:

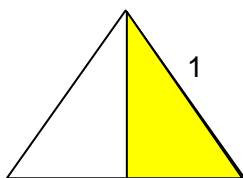
Aplicando o Teorema de Pitágoras resulta:

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

En xeral, escribiremos: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(A suma do seno ó cadrado máis o coseno ó cadrado dun ángulo é sempre igual a 1).



Actividade 3. 4:

Dividindo á metade un triángulo equilátero de lado 1 formamos triángulos rectángulos.

- Calcula a base e a altura dun destes novos triángulos.
- Comproba que os seus ángulos son 30° , 60° e 90° .
- Calcula as razóns trigonométricas de 30° e 60° .

Exemplo: Sabendo que $\sin(A)=0'8$, calcula $\cos(A)$ e $\tan(A)$.

Solución: A fórmula fundamental da trigonometría permítenos calcular o coseno dun ángulo coñecendo o seno.

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1 \rightarrow 0'8^2 + \cos^2(A) = 1 \rightarrow \cos(A) = \sqrt{1 - 0'8^2} = \pm 0'6$$

A raíz cadrada ten un dobre signo, pero o coseno dos ángulos ós que nos estamos a referir (entre 0° e 90°) é positivo: $\cos(A)=0'6$

Agora é doado calcula-la tanxente:

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} \rightarrow \tan(A) = \frac{0'8}{0'6} = \frac{4}{3}$$

Actividade 3.5: Se $\sin x = 0'3$, calcula $\cos x$ e $\tan x$.

Resolución de triángulos

Trátase de, coñecendo tres datos calquera dun triángulo, calcular tódolos demais, en especial os lados e os ángulos.

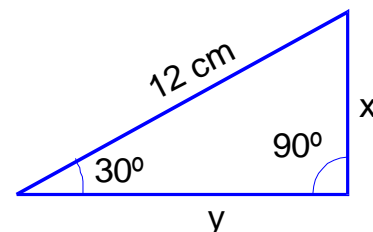
Se o triángulo é rectángulo, podemos utilizar directamente as razóns trigonométricas ou o Teorema de Pitágoras.

De non selo, deberemos descompoñelo en triángulos rectángulos (por exemplo trazando unha altura).

Exemplo: Sabendo que a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 12 cm e que un dos ángulos agudos é de 30° , calcula os demais lados do triángulo.

Solución: Coñecemos un ángulo, 30° e a hipotenusa, 12. Para calcular x , cateto oposto a 30° , só debemos preguntarnos que relaciona ó cateto oposto a un ángulo e a hipotenusa: o seno de 30°

$$\left. \begin{aligned} \sin(30) &= \frac{x}{12} \\ \text{Na calculadora} \rightarrow \sin(30) &= 0'5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{12} = 0'5 \Rightarrow x = 12 \cdot 0'5 = 6 \text{ cm}$$



Para calcular y , cateto contiguo a 30° , preguntámonos que relaciona ó cateto contiguo a un ángulo e a hipotenusa: o coseno.

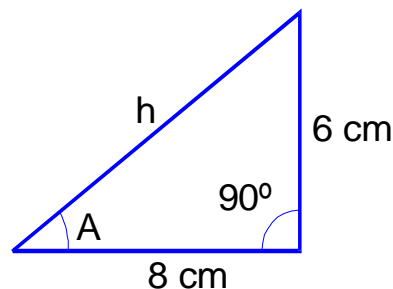
$$\left. \begin{aligned} \cos(30) &= \frac{y}{12} \\ \text{Na calculadora} \rightarrow \cos(30) &= 0'87 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y}{12} = 0'87 \Rightarrow y = 12 \cdot 0'87 = 10'44 \text{ cm}$$

Exemplo: Nun triángulo rectángulo, os catetos miden 6 cm e 8 cm respectivamente. ¿Canto miden os ángulos do triángulo?

Solución: Coñecemos os catetos, ¿qué relaciona os catetos e un ángulo agudo do triángulo?: a tanxente do ángulo.

$$\tan(A) = 0'75 \xrightarrow{\text{Na calculadora}} \tan^{-1}(0'75) = 36'87'' \Rightarrow A = 36^\circ 52' 12''$$

O outro ángulo agudo será: $B = 90 - A = 53^\circ 7' 48''$



Exemplo: Comproba se o triángulo de lados 6, 8 e 10 é rectángulo.

Solución: Sabemos que só os triángulos rectángulos verifican o Teorema de Pitágoras, polo que só temos que comprobar se este o verifica ou non:

Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 10^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = 68 + 36 \Rightarrow 100 = 100 \quad \text{Si,}$$

o triángulo é rectángulo.

Exemplo: Calcula o lado x no triángulo da figura.

Solución:

Comprobamos se é rectángulo, que sería o tipo de triángulo máis doado de estudar:

$$A + 60 + 40 = 180 \Rightarrow A = 80^\circ \neq 90^\circ$$

O triángulo non é rectángulo polo que non podemos utilizar directamente os razóns trigonométricas.

Trazando a altura relativa ó lado x obtemos dous triángulos rectángulos:

$$\left. \begin{array}{l} \tan(60) = \frac{h}{4-m} = 1.73 \\ \tan(40) = \frac{h}{m} = 0.84 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = 1.73(4-m) \\ h = 0.84m \end{array} \right\} \Rightarrow 1.73(4-m) = 0.84m \Rightarrow m = 2.69$$

Agora o cálculo de x é doado:

$$\cos(40) = \frac{2.69}{x} \Rightarrow x = \frac{2.69}{\cos(40)} = 3.51$$

Exercicio 3.1: Calcula o outro lado.

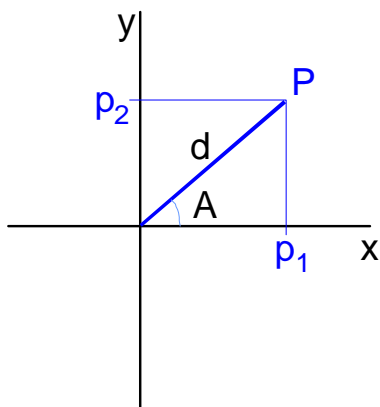
Coordenadas polares

Sobre un mapa é moito máis doado fixar a posición dun punto pola súa distancia ó orixe de coordenadas e polo ángulo en relación a dirección Norte-Sur. Son as **coordenadas polares: P(d,A)**

Buscaremos un método para pasar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Facendo un esquema vemos que as coordenadas rectangulares correspóndense cos catetos dun triángulo rectángulo.

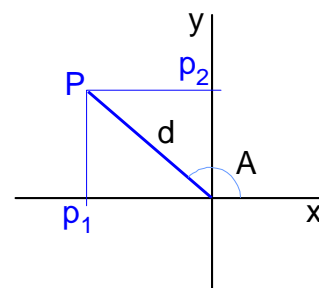
- Coordenadas rectangulares: P(p₁,p₂)
- Coordenadas polares: P(d,A)



Para pasar dunhas a outras debemos utilizar as razóns trigonométricas do ángulo A:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(A) &= \frac{p_2}{d} \\ \cos(A) &= \frac{p_1}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_2 &= d \cdot \operatorname{sen}(A) \\ p_1 &= d \cdot \cos(A) \end{aligned}$$

As fórmulas anteriores son válidas para puntos do primeiro cadrante (noutro caso, non temos definidas as razóns trigonométricas do ángulo). Para poder aplicar as fórmulas anteriores a un punto calquera do plano, debemos definir o seno e o coseno dun ángulo calquera



Coseno e seno de calquera ángulo.

Nun triángulo rectángulo de hipotenusa 1, o cateto oposto a un ángulo agudo mide o mesmo co seno dese ángulo e o cateto contiguo o mesmo co coseno. Dese xeito podemos calcular o seno e o coseno dun ángulo sen efectuar ningunha operación.

En coherencia con isto imos definir as razóns trigonométricas dun ángulo calquera.

Debuxando varios triángulos con hipotenusa 1, os extremos da hipotenusa van formando unha circunferencia de radio 1 e, situando a circunferencia co centro na orixe de coordenadas, as coordenadas deses puntos coinciden co seno e o coseno dos ángulos.

Podemos definir o seno e o coseno dun ángulo calquera coa axuda desa circunferencia de radio 1 centrada na orixe de coordenadas (circunferencia trigonométrica ou tamén goniométrica).

Coseno dun ángulo calquera: Primeira coordenada do punto que determina ese ángulo na circunferencia de radio 1.

Seno dun ángulo calquera: Segunda coordenada do punto que determina ese ángulo na circunferencia trigonométrica.

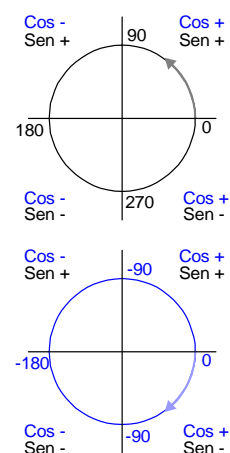
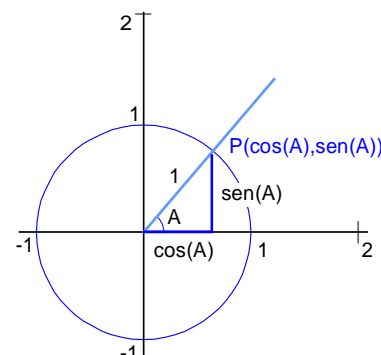
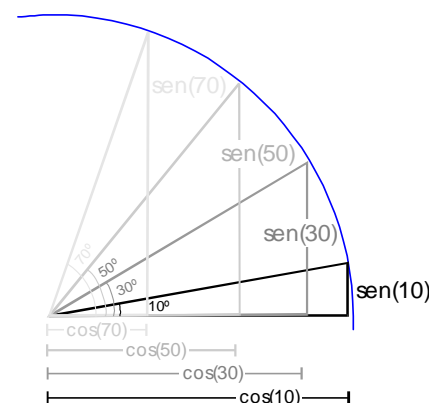
Consecuencias inmediatas desas definicións son:

Signos: O coseno é positivo nos ángulos do 1º e 4º cuadrantes e negativo nos do 2º e 3º e o seno é positivo no 1º e 2º cuadrantes e negativo no 3º e 4º.

Senos e cosenos doados de calcular: o seno e coseno dalgúns ángulos son inmediatos a partir da gráfica.

Ángulo	Coseno	Seno
0	1	0
90	0	1
180	-1	0

Ángulo	Coseno	Seno
270	0	-1
360	1	0
450	0	-1



Senos e cosenos de ángulos negativos: os ángulos positivos mídense seguindo o sentido contrario ás agullas do reloxo e negativos no sentido contrario.

Compróbase facilmente que $\sin(A) = -\sin(-A)$ e $\cos(A) = \cos(-A)$

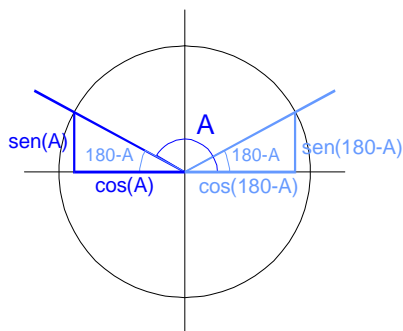
O seno e coseno dalgúns ángulos negativos son:

Ángulo	Coseno	Seno
-90	0	-1
-180	-1	0

Ángulo	Coseno	Seno
-270	0	1
-360	1	0

Valores máximos e mínimos: o maior valor que poden tomar o seno e o coseno é 1, e o menor é -1.

Formulas de redución o 1º cadrante: Para un ángulo calquera, A, hai outro do 1º cadrante B, de xeito que o seno e o coseno deses ángulos diferéncianse como moito no signo:

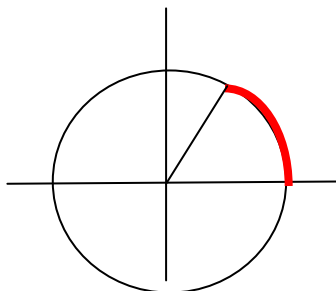


A do 2º cadrante	A do 3º cadrante	A do 4º cadrante
$B = 180 - A$	$B = A + 180$	$B = 360 - A$
$\sin(A) = \sin(B)$	$\sin(A) = -\sin(B)$	$\sin(A) = -\sin(B)$
$\cos(A) = -\cos(B)$	$\cos(A) = -\cos(B)$	$\cos(A) = \cos(B)$

Na figura aparece a demostración cando o ángulo A é do 2º cadrante. Como pode verse, se $B = 180 - A$, os triángulos que determinan os valores do seno e do coseno de A e B son iguais. A única diferenza nos seus valores é que o coseno de A é negativo por estar a esquerda da orixe.

Radiáns

Sobre esta forma de representación é frecuente utilizar outra unidade: o radián, que sería o ángulo que corresponde a un arco que mida exactamente o mesmo ca o radio:



Como a lonxitude da circunferencia é $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, resulta que nos 360º cabería exactamente 2π veces o radio, unhas 6'28 veces.

Podemos establecer así unha relación proporcional: 360º equivalen a 2π radiáns (frecuentemente utilizamos π e as súas fraccións, en vez do número decimal).

Actividade 3.6:

- A cantos grados equivalen π radiáns?
- A cantos radiáns equivalen 90º?
- A cantos grados equivalen $\frac{\pi}{5}$ radiáns?
- A cantos radiáns equivalen 40º?

Actividade 3.7: Coa axuda da calculadora, fai unha táboa cos valores do seno e do coseno para ángulos de 0 a 360 dando valores de 30 en 30 graos. Comproba que se cumpren as relacións anteriores.

Tanxente dun ángulo calquera

Definimos a tanxente dun ángulo calquera a partir do seno e coseno dese ángulo:

$$\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cos}(A)}$$

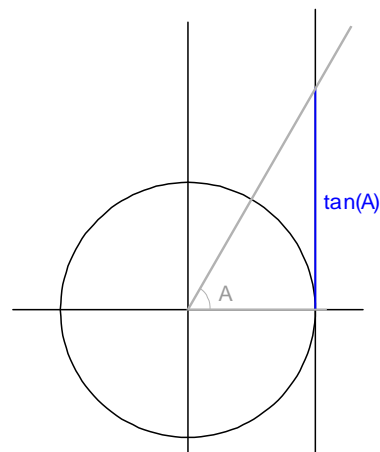
Ó estar definida como un cociente, non existira tanxente cando o coseno (denominador) sexa 0. Non teñen tanxente os ángulos: -270° , -90° , 90° , 270° , 450° , ...

Podemos visualizar a tanxente utilizando a recta tanxente (de aí o nome) á circunferencia trigonométrica no punto (1,0).

A tanxente do ángulo é a 2ª coordenada do punto que determina sobre esa recta tanxente.

Vemos que, por exemplo, o ángulo de 90° non corta a recta tanxente. Non existe tanxente de 90° .

A diferenza do seno e do coseno que sempre están comprendidos entre -1 e 1 , a tanxente pode tomar calquera valor.



Actividade 3.8: Demostra que realmente podemos visualizar a tanxente tal como se indicou anteriormente.

Exemplo: Coa axuda da calculadora, atopa tódolos ángulos comprendidos entre 0° e 360° que cumpran que o seu seno sexa $0'5$.

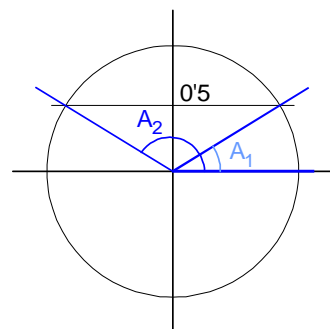
Solución.

Sabemos que o seno é a altura (2ª coordenada) do punto que determina o ángulo na circunferencia. Buscamos pois o valor $0'5$ no eixe Y e debuxamos os ángulos que corresponden a ese valor. Obtemos dous, un no 1º e outro no 2º cuadrantes.

O ángulo do 1º cadrante dánolo a calculadora utilizando a función inversa do seno:

$$A_1 = \text{arc sen}(0'5) = 30^\circ$$

Para calcula-lo correspondente ó 2º cadrante só compre decatarse de que $A_1 + A_2 = 180$, polo tanto: $A_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$



Exercicio 3.2: Coa axuda da calculadora, atopa tódolos ángulos comprendidos entre 0° e 360° que cumpran:

- Que o seu coseno sexa $-0'71$.
- Que a súa tanxente sexa -2 .

Teorema do seno

Nun triángulo calquera, a razón entre un lado e o seno do ángulo oposto ten sempre o mesmo valor:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Demostración: Se o triángulo é rectángulo, a demostración é inmediata.

$$\left. \begin{array}{l} \sin(B) = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin(B)} \\ \sin(C) = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin(C)} \end{array} \right\} \xrightarrow[A=90^\circ]{\sin(A)=1} \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

En xeral, para triángulos non rectángulos, distinguiremos dous casos:

Caso 1: O triángulo ten tódolos ángulos agudos.

Sexa ABC un triángulo calquera. Trazamos unha altura para descompoñelo en triángulos rectángulos.

Resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(A) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin(A) \\ \sin(C) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin(C) \end{array} \right\}$$

$$\text{Igualando: } c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

De xeito semellante, sen máis que considerar a altura relativa ó lado a, podemos deducir:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(B) = \frac{h}{c} \\ \sin(C) = \frac{h}{a} \end{array} \right\} c \cdot \sin(B) = a \cdot \sin(C) \Leftrightarrow \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Caso 2: Un dos ángulos é obtuso. Neste caso a primeira parte é semellante pero para a segunda debemos ter en conta que a altura cae fora da base:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(A) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin(A) \\ \sin(C) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin(C) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(180 - B) = \frac{h}{c} \\ \sin(C) = \frac{h}{a} \end{array} \right\} c \cdot \sin(180 - B) = a \cdot \sin(C) \Leftrightarrow \frac{b}{\sin(180 - B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Como $\sin(180-B)=\sin(B)$, obtemos $\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

Polo tanto, calquera que sexa o triángulo:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

O teorema do seno permite resolver triángulos calquera (non só rectángulos), con tal de coñecer un lado e o ángulo oposto.

Exemplo:

Desde un certo lugar vemos unha curuxa pousada nunha pola dunha árbore.

A visual forma un ángulo de 10° en relación á horizontal.

Achegándonos 50 metros, o ángulo da visual pasa a ser de 40° . ¿A que altura está a curuxa e a que distancia nos atopabamos dela?

Solución:

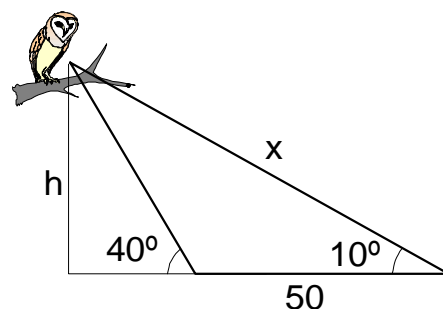
Empecemos por facer un esbozo da situación:

Calculamos os ángulos do triángulo: $\left. \begin{array}{l} 180 - 40 = 140 \\ 180 - (10 + 140) = 30 \end{array} \right\}$

Polo teorema do seno:

$$\frac{50}{\sin(30)} = \frac{x}{\sin(140)} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot \sin(140)}{\sin(30)} = 64'28 \text{ m}$$

$$\sin(10) = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \sin(10) \rightarrow h = 64'28 \cdot \sin(10) = 11'16 \text{ m}$$



Teorema do coseno

Tamén coñecido como teorema de Pitágoras xeneralizado.

Nun triángulo calquera verifícase:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

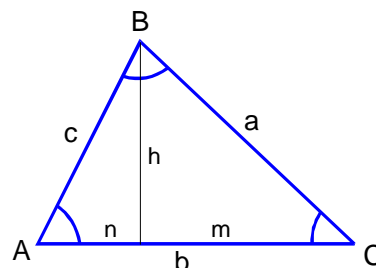
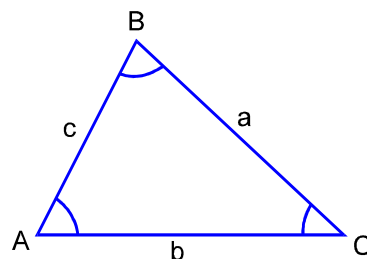
Demostración:

Caso 1: Se o ángulo A é recto, o teorema é inmediato.

Caso 2: Se A non é recto, trazámo-la altura relativa o lado b (ou o c no caso de que a anterior caese fora da base) e obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} n = c \cdot \cos(A) \\ b = m + n \end{array} \right\} \Rightarrow m = b - c \cdot \cos(A)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:



$$a^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (b - c \cdot \cos(A))^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) + c^2 \cdot \cos^2(A)$$

Aplicando Pitágoras ó outro triángulo:

$$c^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (c \cdot \cos(A))^2 = h^2 + c^2 \cdot \cos^2(A)$$

Restando as ecuacións anteriores:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Exemplo: Calcula os ángulos do triángulo de lados 10, 12 e 14.

Solución:

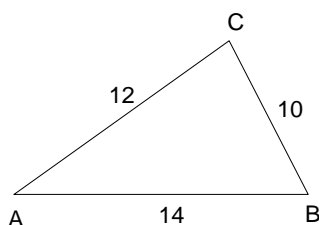
Polo teorema do coseno:

$$10^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cos(A) \Rightarrow \cos(A) = \frac{10^2 - (12^2 + 14^2)}{-2 \cdot 12 \cdot 14} = 0'7143$$

$$A = \arccos(0'7143) = 44'41'' \rightarrow A = 44^\circ 24' 36''$$

$$\frac{10}{\sin(44'41'')} = \frac{14}{\sin(B)} \Rightarrow \sin(B) = \frac{14 \cdot \sin(44'41'')}{10} = 0'9797$$

$$B = \arcsin(0'9797) = 78'44''$$



Exercicio 3.3: Para medir o ancho dun río, dous observadores situados nunha das beiras e separados por unha distancia de 100 m ven unha árbore na outra beira baixo os ángulos de 42° e 37° respectivamente, ¿cal é ancho do río?

Exercicio 3.4: Nunha lagoa hai unha ponte colgante. Desde un lugar situado a 94 m dun dos extremos da ponte e 123 do outro, a ponte vese baixo un ángulo de 36° , cal é a súa lonxitude?

Ampliación

As primeiras medidas, a Terra plana: Hecateo

Na Grecia antiga (ata o 450 a.C. aproximadamente) coidábase que a Terra era un disco plano, no centro do disco atopábanse os continentes rodeados polo río Océano e, no centro dos continentes, Grecia. O mundo reducíase ó Mediterráneo.

Hecateo de Mileto (500 a. C.) estimou que o disco debía ter uns 8000 km. de diámetro (25000 km² de superficie).



A Terra esférica: Eratóstenes.

A primeira suxerencia que temos dunha Terra esférica data do 450 a. C. e débese a Filolao de Tarento (480-? a. C.).

Esta idea xa era aceptada pola maioría dos pensadores polo 350 a.C. pero a primeira proba concluínte só chegou en 1522, cando Magallanes completou a primeira volta o Mundo.

Cando se consideraba a Terra como un disco plano, o único xeito de calcular o seu tamaño era chegando ata o borde e medindo a distancia. Cunha Terra esférica as cousas son moi diferentes. Unha superficie curva produce efectos que fan posible medir a súa curvatura e, polo tanto o seu tamaño.

O primeiro en utilizar un deses efectos para medir o tamaño do noso planeta foi Eratóstenes de Cirene (276-196 a. C.).²

Eratóstenes leu que en Siena, ao mediodía do día do solsticio de verán, as estacas verticais non proxectaban sombras e o Sol penetraba ata o fondo dos pozos. En Alexandría, eso non era así, o que atribuíu, correctamente, á curvatura da superficie terrestre.



- Eratóstenes obtivo unha medida de 7° para a inclinación dos raios do Sol en Alexandría o día do solsticio e deduciu que ese ángulo ten que ser igual ó ángulo formado polas liñas que parten de Siena e Alexandría ata o centro da Terra.

² Un dos grandes sabios da antigüidade, astrónomo, historiador, xeógrafo, filósofo, poeta, matemático e director da Biblioteca de Alexandría

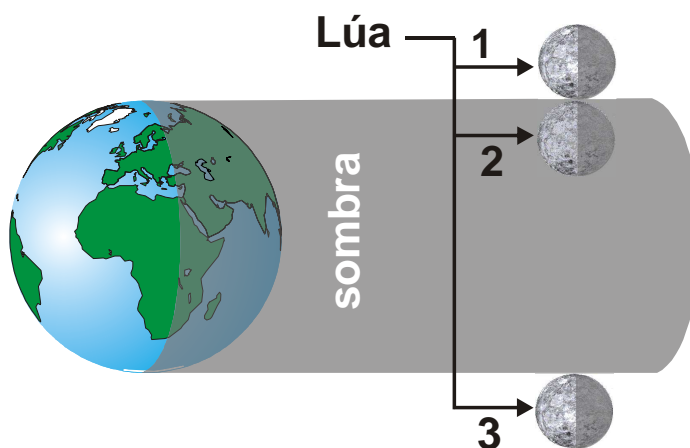
- Contratou un home para ir de Alexandría a Siena contando os pasos e medir, dese xeito, a distancia entre as vilas (800 km.).
- Con eses datos, calculou a medida da circunferencia da Terra: se 7° corresponden a 800 km. 360° corresponderán a: $L = \frac{800}{7} \cdot 360 \approx 40.000 \text{ km}$
- Diámetro da Terra³: $d = \frac{40.000}{\pi} \approx 13.000 \text{ km}$.

O tamaño do Sistema Solar: distancia Terra-Lúa

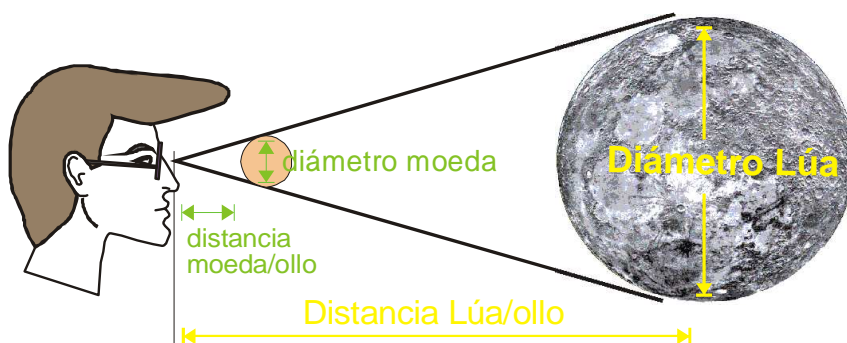
Aristarco de Samos⁴, obtivo unha estimación da distancia Terra-Lúa baseada na medición dos *tempos de transito* da Lúa durante un eclipse: O tempo que emprega a Lúa en pasar da posición 1 a 2 depende do seu diámetro e o que emprega en pasar da 2 a 3 depende do diámetro da Terra.

O tempo do paso de de 2 a 3 é 4 veces maior co do paso de 1 a 2, o que leva a que a Terra é 4 veces maior ca Lúa (o método foi perfeccionado por Hiparco de Nicea, 190-120 a.C.).

Calculado o tamaño da Terra por Eratóstones e o da Lúa a partir del, puideron calcular a distancia Terra-Lúa a partir do tamaño aparente da Lúa.



- Sitúase un círculo (moeda) diante do ollo e alónxáse ata que oculte a Lúa, nese intre os tamaños aparentes do círculo e da Lúa son iguais e fórmanse triángulos semellantes cos diámetros dos dous obxectos.



³ Ós contemporáneos de Eratóstenes esas dimensións pareceronlle escasas polo que repetiron as observacións e obtiveron cifras máis pequenas (29000 km de circunferencia e 9100 de diámetro), cifras que foron aceptadas sen discusión e que foron recollidas moito despois nun mapa por Toscanelli, mapa que seguramente tiña Colón, e que utilizou para demostrar a viabilidade da súa viaxe as Indias seguindo ó Sol, pero esta é outra historia.

⁴ Aristarco foi outro dos grandes científicos da antigüidade. Sostiña que o Universo era moito maior do que se pensaba, que as estrelas eran soles distantes e que, como o Sol, estaban fixas; que a Terra xiraba ó redor do Sol nun círculo enorme e as estrelas estaban a unha distancia moito maior.

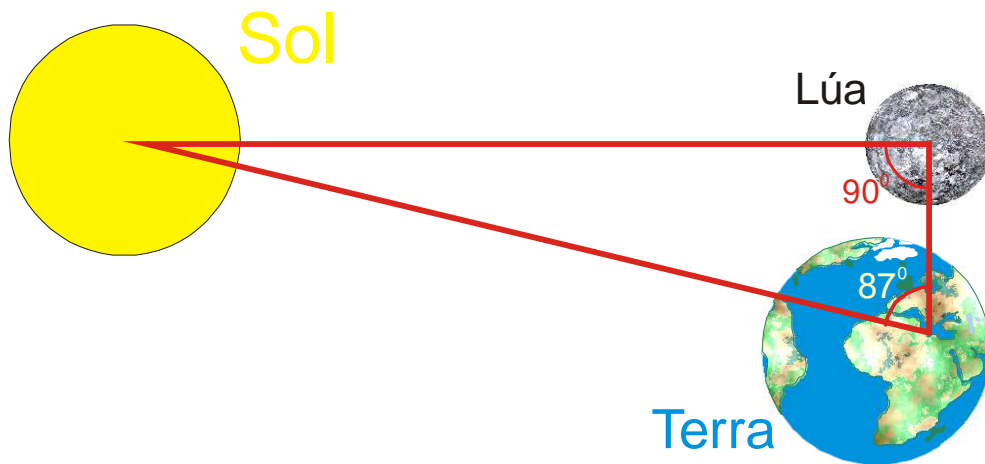
- Podemos establecer a proporción seguinte:

$$\frac{\text{diam.circulo}}{\text{diam.Lua}} = \frac{\text{dist.circulo} / \text{ollo}}{\text{dist.Lua} / \text{ollo}} \Rightarrow \text{dist.Lua} / \text{ollo} = 390.000 \text{ km}$$

O tamaño do Sistema Solar: distancia Terra-Sol

Novamente foi a xenialidade de Aristarco a que, por primeira vez que nos saibamos, desenvolveu un método correcto para medir a distancia Terra-Sol.

Aristarco decatouse de que cando a Lúa está en carto crecente ou en carto minguante, a Terra, o Sol e a Lúa; forman os vértices dun triángulo rectángulo.



Aristarco obtivo un valor de $87^{\circ} 8'$ para un ángulo agudo dese triángulo, o que permite calcular a distancia Terra-Sol:

$$\cos(87^{\circ} 8') = \frac{390.000}{d} = 0,05 \Rightarrow d = \frac{390.000}{0,05} \approx 8.000.000 \text{ km}$$

	Grecia Clásica	Actualidade
Diámetro da Terra	13.000 km	12.756 km
Diámetro da Lúa	3.250 km.	3.476 km.
Distancia Terra-Lúa	390.000 km	384.400 km
Distancia Terra-Sol	8.000.000 km	150.000.000 km.

Foi unha das maiores proezas do ser humano. Na Grecia Clásica, fai máis de 2000 anos, e servíndose só do seu intelecto, un grupo de sabios foi capaz de medir con precisión o tamaño da Terra e dos obxectos máis próximos.

Os seus descubrimentos eran tan asombrosos que a maioría dos seus contemporáneos non os aceptaron pero os seus logros quedan para sempre como unha demostración do que o ser humano é capaz.