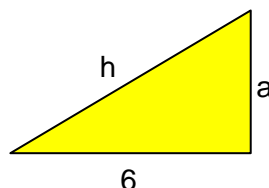
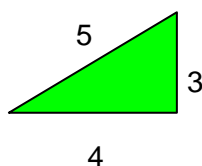


# Solucións das actividades e exercicios

## Unidade 3

### Actividade 3.1:

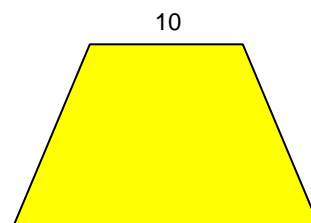
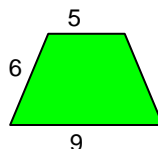
1) Calcula as medidas **a** e **h** do triángulo grande:



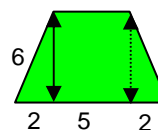
Se os triángulos son semellantes, a relación entre as hipotenusas debe ser a mesma ca relación entre as bases:  $\frac{h}{5} = \frac{6}{4} \rightarrow h = 5 \cdot \frac{6}{4} = 7.5$

E tamén igual ca relación entre as alturas:  $\frac{a}{3} = \frac{6}{4} \rightarrow a = 3 \cdot \frac{6}{4} = 4.5$

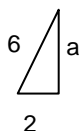
2) Calcula a altura do trapezio grande:



Teremos que coñecer primeiro cal é a altura do trapezio pequeno:



Fórmase un triángulo rectángulo

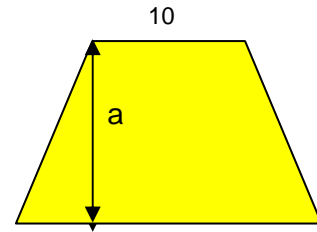
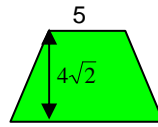


de hipotenusa 6 e base 2. Polo teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 2^2 + a^2 \rightarrow 36 = 4 + a^2 \rightarrow a^2 = 32 \rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Agora utilizamos a relación de semellanza para facer cálculos no trapezio grande. A relación entre as alturas é a mesma ca relación entre os lados superiores:

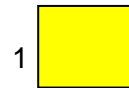
$$\frac{a}{4\sqrt{2}} = \frac{10}{5} \rightarrow a = 4\sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{2}$$



- 3) Canto mide a área dun cadrado de 1 m de lado?

E a área dun cadrado de 2m de lado?

$$\text{Área} = l^2 \quad 1^2 = 1 \quad e \quad 2^2 = 4$$



- 4) Cal é a razón de semellanza entre unha moeda de 10 cts de € e outra de 1€? Cal é a razón entre as súas áreas?

Medimos os diámetros respectivos:  $d_{10\text{cts}} = 1'97$  cm  $d_{1\text{€}} = 2'32$  cm. A razón entre os diámetros será  $r = \frac{2'32}{1'97} = 1'18$  (o diámetro da moeda de 1 € é un 17'8% maior ca da de 10 cts)

Como  $A = \pi r^2$ , utilizamos os raios, 0'99 e 1'16, respectivamente, obtendo como áreas

$$A_{10\text{cts}} = \pi \cdot 0'99^2 = 3'08 \text{ cm}^2 \text{ e } A_{1\text{€}} = \pi \cdot 1'16^2 = 4'23 \text{ cm}^2 \text{ respectivamente.}$$

A razón entre as áreas será:  $r = \frac{4'23}{3'08} = 1'37$  que, como pode apreciarse, é diferente da razón entre os diámetros.

- 5) En xeral, a relación entre os lados de dúas figuras semellantes é a razón de semellanza pero, cal é a relación entre as áreas de figuras semellantes?

Experimentemos nun exemplo (as áreas das moedas anteriores). O noso obxectivo é escribir a razón das áreas en función da razón dos diámetros:

$$r = \frac{4'23}{3'08} \xrightarrow{\text{retrocedamos nos cálculos}} \frac{\pi \cdot 1'16^2}{\pi \cdot 0'99^2} = \frac{1'16^2}{0'99^2} = \left( \frac{1'16}{0'99} \right)^2$$

A razón das áreas é o cadrado da razón entre os radios que, loricamente, é a mesma que a razón entre os diámetros.

Podemos enunciar un principio xeral: "A razón entre as áreas de figuras semellantes é o cadrado da razón de semellanza".

**Actividade 3.2:** Comproba se a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa do triángulo de lados 5, 4 e 3 é igual a suma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.

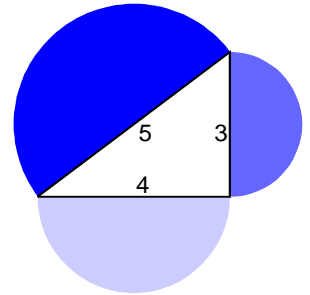
Como  $A = \pi r^2$ , utilizamos os raios: 2'5, 2 e 1'5, respectivamente.

$$A_{\text{semicírculo-hipotenusa}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{3'14 \cdot 6'25}{2} = 9'8125$$

$$A_{\text{semicírculo-base}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{3'14 \cdot 4}{2} = 6'28$$

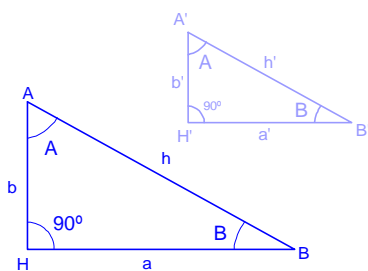
$$A_{\text{semicírculo-altura}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{3'14 \cdot 2'25}{2} = 3'5325$$

$$\text{Efectivamente: } 6'28 + 3'5325 = 9'8125$$



**Actividade 3.3:** demostra que as demais razóns trigonométricas tamén están ben definidas.

O razoamento é semellante para o coseco:



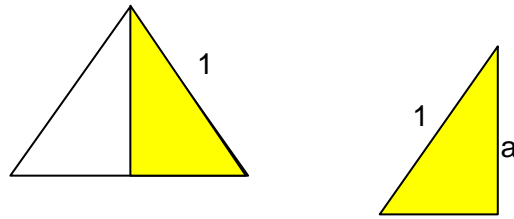
$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} \rightarrow b \cdot h' = h \cdot b' \rightarrow \frac{b}{h} = \frac{b'}{h'} = \cos A$$

Polo tanto, para un ángulo calquera A, a relación entre o cateto contiguo e a hipotenusa é a mesma sexa cal sexa o tamaño do triángulo rectángulo que utilizemos.

De xeito semellante procederemos para a tanxente:

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \rightarrow b \cdot a' = a \cdot b' \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \tan A$$

### Actividade 3. 4:



Dividindo á metade un triángulo equilátero de lado 1 formamos triángulos rectángulos.

a) Calcula a base e a altura dun destes novos triángulos. A base é a metade do lado: 0'5.

A altura calculámola por Pitágoras:

$$1^2 = 0'5^2 + a^2 \rightarrow 1 = 0'25 + a^2 \rightarrow a^2 = 0'75 \rightarrow a = \sqrt{0'75} = 0'866$$

Operando con fraccións e radicais temos un resultado exacto:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 \rightarrow 1 = \frac{1}{4} + a^2 \rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Comproba que os seus ángulos son 30°, 60° e 90°.

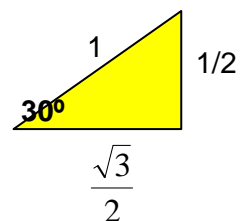
O triángulo equilátero ten os lados e ángulos iguais. Repartindo os 180°, tocan a 60° para cada ángulo.

O de arriba, ao partilo á metade quedará de 30°. E o de abaixo, por ser recto é de 90°.

c) Calcula as razóns trigonométricas de 30° e 60°.

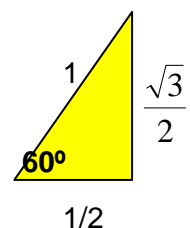
$$\sin 30^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$



**Actividade 3.5:** Se  $\sin x = 0'3$ , calcula  $\cos x$  e  $\tan x$ .

Debemos recordar a fórmula fundamental, que relaciona seno e coseno:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

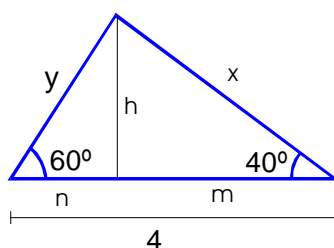
e a relación entre as tres:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  (fíxate que se o divisor fose 0 non sería válida, xa que non existe división entre 0)

Non queda máis que substituír:  $0'3^2 + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0'91 \rightarrow \cos x = \pm 0'954$  (dúas posibilidades de signos contrarios)

$$\tan x = \frac{0'3}{\pm 0'954} = \pm 0'314$$

**Exercicio 3.1:** Calcula o outro lado.

Podemos utilizar o exercicio anterior para obter o valor de  $h$  pero, por repasar o proceso, imos proceder de maneira semellante a como fixemos para o lado  $x$ :



$$\left. \begin{array}{l} \tan(60) = \frac{h}{n} = 1'73 \\ \tan(40) = \frac{h}{4-n} = 0'84 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = 1'73n \\ h = 0'84(4-n) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1'73n = 0'84(4-n) \Rightarrow n = 1'31$$

$$\cos(60) = \frac{n}{y} \rightarrow 0'5 = \frac{1'31}{y} \Rightarrow y = \frac{1'31}{0'5} = 2'62$$

**Actividade 3.6:**

a) A cantos grados equivalen  $\pi$  radiáns?

Un radián corresponde a un radio. Na circunferencia ( $360^\circ$ ) caben  $2\pi$  radios ( $L=2\pi r$ ).

Logo  $2\pi$  radiáns son  $360^\circ$ , polo que  $\pi$  serán  $180^\circ$ .

b) A cantos radiáns equivalen  $90^\circ$ ?

Como  $90^\circ$  é  $\frac{1}{4}$  de  $360^\circ$ , serán  $\frac{1}{4}$  de  $2\pi$  radiáns, ou sexa:  $\frac{\pi}{2}$ .

c) A cantos grados equivalen  $\frac{\pi}{5}$  radiáns?  $x$  grados

Podemos xa presentar a relación xeral:  $\frac{x}{360^\circ} = \frac{\pi/5}{2\pi} \Rightarrow x = 360^\circ \cdot \frac{\pi/5}{2\pi} = 36^\circ$

d) A cantos radiáns equivalen  $40^\circ$ ?  $x$  radiáns

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow x = 2\pi \cdot \frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{9}$$

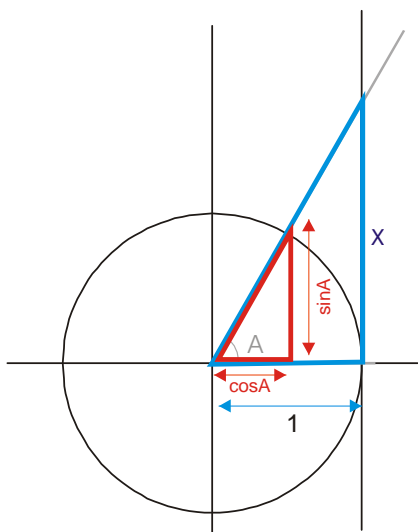
(Fíxate que á hora de escribir sempre poñemos a incógnita en primeiro lugar. Iso non repercute no resultado, pero é máis cómodo).

**Actividade 3.7:** Coa axuda da calculadora, fai unha táboa cos valores do seno e do coseno para ángulos de 0 a 360 dando valores de 30 en 30 graos. Comproba que se cumpren as relacións anteriores.

| x    | 0 | 30   | 60   | 90 | 120  | 150   | 180 | 210   | 240   | 270 | 300   | 330  | 360 |
|------|---|------|------|----|------|-------|-----|-------|-------|-----|-------|------|-----|
| sinx | 0 | 0'5  | 0'87 | 1  | 0'87 | 0'5   | 0   | -0'5  | -0'87 | -1  | -0'87 | -0'5 | 0   |
| cosx | 1 | 0'87 | 0'5  | 0  | -0'5 | -0'87 | -1  | -0'87 | -0'5  | 0   | 0'5   | 0'87 | 1   |

Para  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$  (este coincide con  $0^\circ$ ) podemos obtelas directamente. As restantes podemos obtelas todas a partir do ángulo de  $30^\circ$ , alternando seo e coseo e adecuando o signo ao cadrante onde se atope o ángulo.

**Actividade 3.8:** Demostra que realmente podemos visualizar a tanxente tal como se indicou anteriormente.



Dentro da circunferencia formase o triángulo habitual (que indicamos en vermello): a hipotenusa (=radio) é 1, a altura é  $\sin A$  e a base é  $\cos A$ .

Vemos un triángulo semellante (indicado en azul), onde a altura é  $x$  e a base é o radio (=1).

Como as razóns trigonométricas dependen do ángulo e non do tamaño do triángulo, teremos:

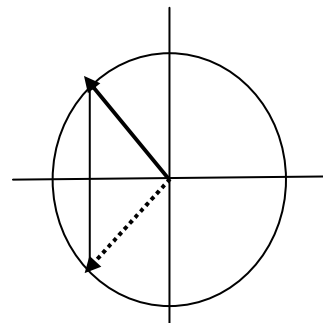
$$\tan A = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. contiguo}} = \frac{x}{1} = x$$

**Exercicio 3.2:** Coa axuda da calculadora, atopa tódolos ángulos comprendidos entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  que cumpran:

a) Que o seu coseno sexa  $-0,71$ .

A tecla que nos interesa virá sinalada en amarelo como  $\text{COS}^{-1}$  (a color pode variar segundo o modelo de calculadora que utilizemos. En xeral ven como unha segunda función da mesma tecla COS)

$$-0,71 \xrightarrow{\text{2nd} \quad \text{COS}^{-1}} 135,235$$



Ten ese mesmo coseco o ángulo indicado pola flecha de puntos (pasa de  $180^\circ$  o mesmo que a  $135,235^\circ$  lle falta):

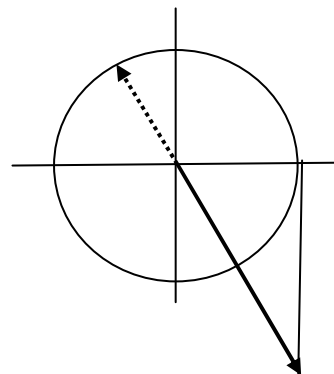
$$180 - 135,235 = 44,765 \text{ logo estoutro ángulo será } 180 + 44,765 = 224,765^\circ.$$

Tamén podemos comparalos con  $270^\circ$  (ao novo ángulo fáltanlle para  $270^\circ$  o que  $135,235^\circ$  pasa de  $90^\circ$ ):  $270 - (135,235 - 90) = 224,765^\circ$

b) Que a súa tanxente sexa  $-2$ .

A tecla que nos interesa virá sinalada en amarelo como  $\text{TAN}^{-1}$  (a color pode variar segundo o modelo de calculadora que utilizemos. En xeral ven como unha segunda función da mesma tecla TAN)

$$-2 \xrightarrow{\text{2nd} \quad \text{TAN}^{-1}} -63,435^\circ$$



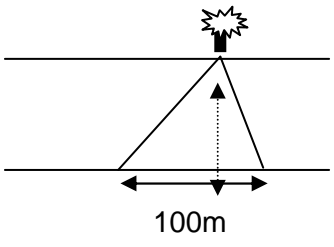
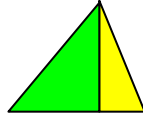
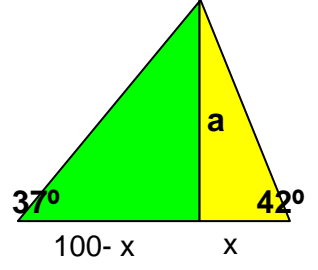
Ten esa mesma tanxente o ángulo indicado pola flecha de puntos:  $180^\circ$  máis que  $-63,435^\circ$ :

$$180 + -63,465 = 116,565^\circ.$$

Tamén podemos considerar  $-63,435^\circ$  como  $360^\circ - 63,435^\circ = 296,565^\circ$

Nese caso o novo ángulo sería  $180^\circ$  menos.

**Exercicio 3.3:** Para medir o ancho dun río, dous observadores situados nunha das beiras e separados por unha distancia de 100 m ven unha árbore na outra beira baixo os ángulos de  $42^\circ$  e  $37^\circ$  respectivamente, ¿cal é ancho do río?

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>Facemos un esquema:</p>  | <p>Formamos obxectos que sexamos quen de manexar: triángulos rectángulos</p>  | <p>Poñemos os datos:</p>  |
|--|--|--|

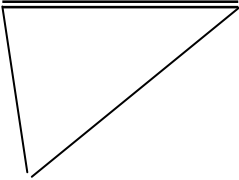
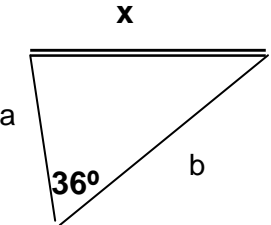
Establecemos as relacións:

|  |   |
|--|---|
| $\tan 37^\circ = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. contiguo}} = \frac{a}{100 - x} = 0'75$ <p style="text-align: center;">↓</p> $a = 75 - 0'75x$ | $\tan 42^\circ = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. contiguo}} = \frac{a}{x} = 0'9$ <p style="text-align: center;">↓</p> $a = 0'9x$ |
|--|---|

Temos dúas ecuacións con dúas incógnitas:  $75 - 0'75x = 0'9x$  que dá para  $x$  o valor de  $45'45$ .

Substituíndo temos para  $a$  o valor de  $40'9$  m.

**Exercicio 3.4 :** Nunha lagoa hai unha ponte colgante. Desde un lugar situado a 94 m dun dos extremos da ponte e 123 do outro, a ponte vese baixo un ángulo de  $36^\circ$ , cal é a súa lonxitude?

|  |   |
|--|---|
| <p>Facemos un esquema:</p>  | <p>Agora o que nos interesa é a lonxitude do lado superior, polo que a figura xa nos debe valer. Poñemos os datos:</p>  |
|--|---|

Establecemos as relacións:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \rightarrow x^2 = 94^2 + 123^2 - 2 \cdot 94 \cdot 123 \cos 36 = 5257'29 \rightarrow x = 72'5\text{m}$$

## Solución ao problema 3.1

### Problema 3.1:

Debuxa un triángulo rectángulo calquera apoiado na súa hipotenusa (se o prefires, podes empezar co triángulo de lados 3, 4 e 5 que é rectángulo pois verifica o teorema de Pitágoras) e traza a altura relativa á hipotenusa.

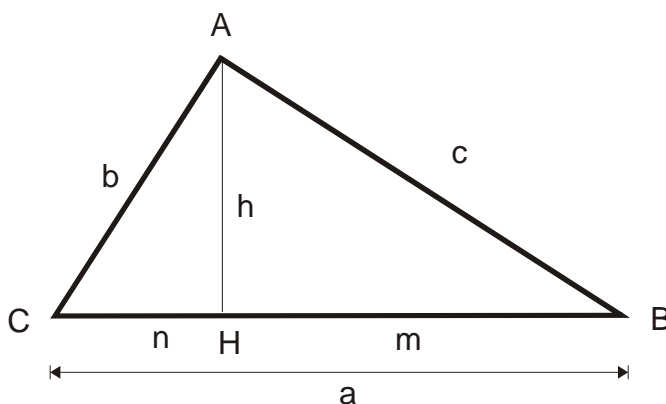
a) Demostra que os triángulos rectángulos que se forman ao trazar esa altura son semellantes ao triángulo orixinal.

b) Apoiándote nas relacións entre os lados deses triángulos semellantes, demostra o **Teorema do Cateto** que afirma que **“un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección ortogonal sobre ela”**.

c) Apoiándote nas relacións entre os lados deses triángulos semellantes, demostra o **Teorema da Altura** que afirma que **“a altura relativa a hipotenusa nun triángulo rectángulo é media proporcional entre os trozos nos que divide á hipotenusa”**.

### Unha posible resposta:

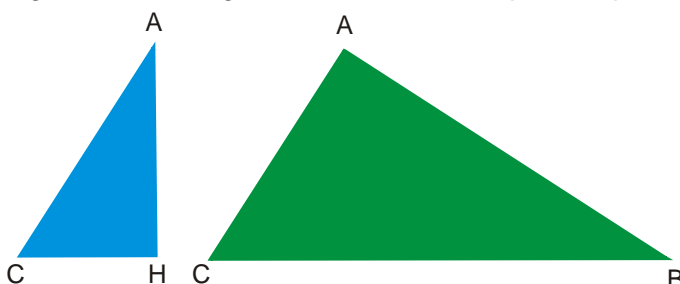
Empezamos por debuxar un triángulo rectángulo xenérico como se indica no enunciado e nomeando os seus elementos:



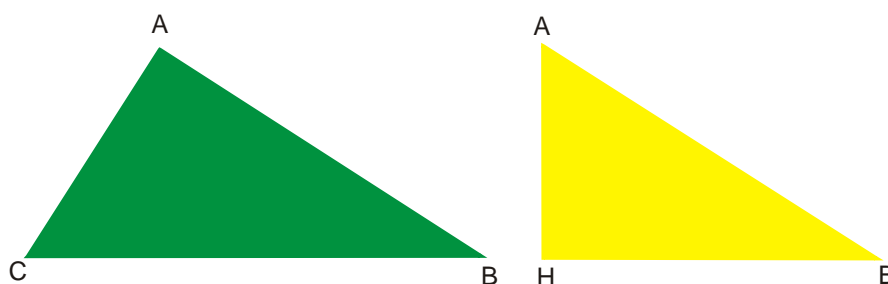
- Acostuma empregarse letras maiúsculas para os vértices e as minúsculas correspondentes para os lados opostos.
- Trazamos a altura. Posiblemente necesitemos referirnos ás partes en que divide á hipotenusa, polo que tamén lles poñemos nomes.

a) Para demostrar que dous triángulos son semellantes é suficiente con probar que os seus ángulos son iguais pero, como a suma dos ángulos dun triángulo é 180, basta con probar que teñen dous ángulos iguais pois o terceiro tamén ten que selo.

- Os triángulos AHC e ABC (o triángulo orixinal) teñen dous ángulos iguais pois: os dous son rectángulos e comparten o ángulo C. Son, polo tanto, semellantes.



- O mesmo sucede cos triángulos ABC e ABH. Ao ter dous ángulos iguais (os dous son rectángulos e comparten o ángulo B), son semellantes.



**b) Teorema do Cateto: Un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección ortogonal sobre ela.**

Escrito empregando fórmulas:

- Para o cateto b do noso triángulo:  $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto}} = \frac{\text{cateto}}{\text{proxección}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$
- Para o cateto c do noso triángulo:  $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto}} = \frac{\text{cateto}}{\text{proxección}} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m}$

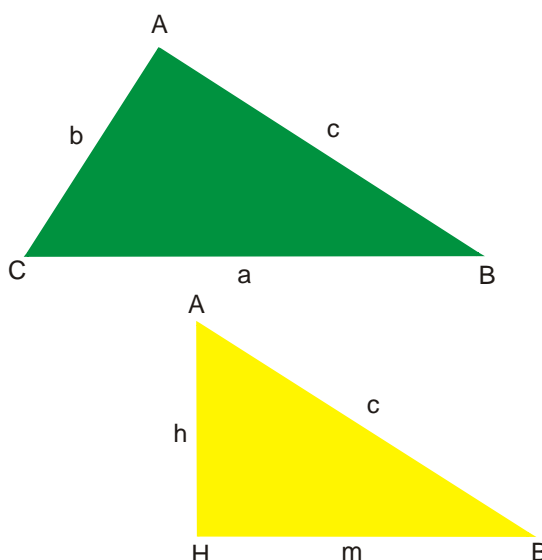
Demostrámolo para un dos catetos, c, é semellante para o outro.

Sabemos que nos polígonos semellantes os lados son proporcionais.

Establecendo as proporcións entre os lados correspondentes dos triángulos ABC e ABH obtemos a igualdade buscada:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

(Fíxate que a proporción é entre os lados que desempeñan o mesmo papel en cada triángulo: hipotenusa con hipotenusa, cateto maior con cateto maior e cateto menor con cateto menor)

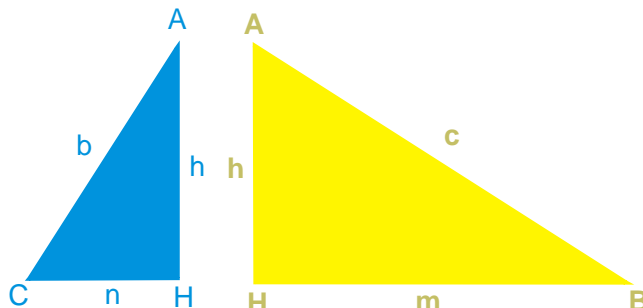


**c) Teorema da Altura: a altura relativa a hipotenusa nun triángulo rectángulo é media proporcional entre os trozos nos que divide á hipotenusa.**

No triángulo ABC, debemos probar que:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Como ABC é semellante a ABH e a AHC, ABH e AHC tamén teñen que sê-lo. Establecendo as proporcións entre os lados obtemos:



$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$