

## Unidade 2: Solucións das actividades e exercicios

### Actividades 2.1:

a) Vimos que a medida da diagonal dun cadrado de lado 1 é  $\sqrt{2}$  e que ese número non é racional. Como construírías, seguindo o método anterior, un segmento que mida  $\sqrt{3}$ , que tampouco é racional.

b) Que sentido ten falar de infinitas cifras decimais? Existen na realidade eses números reais?

c) No texto aparece o desenvolvemento decimal de  $\sqrt{2}$  con 40 cifras exactas. Pareceche posible medir algo con tanta precisión? Iremos comparalo con dimensións do átomo:

Diámetro:  $10^{-8}$  cm

Diámetro do núcleo:  $10^{-12}$  cm.

Carga dun electrón:  $1'602 \cdot 10^{-19}$  coulombs

Masa do electrón:  $9'10833 \cdot 10^{-28}$  g.

Escribe os números anteriores en forma decimal.

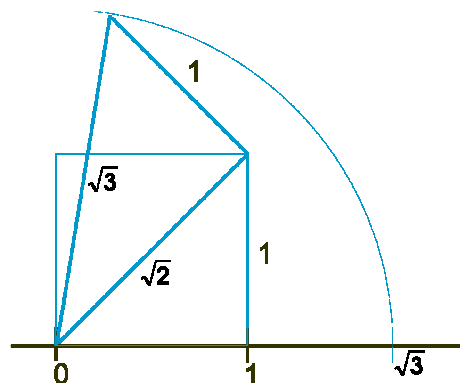
#### Resposta:

a) Podemos invertir o proceso de construción de  $\sqrt{2}$ :

- No último paso resultaba:  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .
- Os 1 corresponden as medidas dos catetos dun triángulo rectángulo.

Para aplicarllo a  $\sqrt{3}$  debemos construír un triángulo rectángulo que, ao elevar os catetos ao cadrado, dé 3. Pero  $3=2+1$ . O número que elevados ao cadrado da 2 é  $\sqrt{2}$

Para construír  $\sqrt{3}$  temos que empezar por construír  $\sqrt{2}$  e logo construír sobre el un triángulo rectángulo co outro cateto igual a 1



b) Os números reais xurden coa medida de lonxitudes, pero é claro que só é posible medir un segmento (ou calquera outra cousa) cunha precisión infinita no mundo abstracto das Matemáticas. É máis, no mundo físico non parece que sexa posible seguir subdividindo unha magnitude ata o infinito.

c)

d)  $10^{-8}=0'00000001$ ,

$10^{-12}=0'000000000001$

$1'602 \cdot 10^{-19}=0'00000000000000000001602$

$9'10833 \cdot 10^{-28}=0'000000000000000000000000000910833$

### Exercicio 2.1:

Completa a táboa utilizando a calculadora para  $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2'593742
100	2'704814
1000	2'716924
10000	2'718146

## Actividade 2.2:

A túa calculadora é un instrumento marabilloso que permite realizar multitude de cálculos cunha enorme precisión, pero non é perfecta. Intenta descubrir os seus límites calculando:

1º Fai $\sqrt{2}$ , mantendo ese resultado na pantalla volve facer a raíz,.....	2º Eleva o último resultado ao cadrado, manténdoo na pantalla fai outra vez o cadrado, ...
a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$	$\left(\left(\left(\text{resultado anterior}\right)^2\right)^2\right)^2 = 2$
b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$	$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\text{resultado anterior}\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 1'99....$

Cales deberían ser os resultados? Os resultados deberían ser 2 (elevamos ao cadrado as mesmas veces que calculamos a raíz co que se anulan) pero a calculadora só pode facer as operacións de xeito aproximado, polo que os pequenísimos erros que comete vanse acumulando e terminan por reflectirse no resultado que aparece na pantalla.

O resultado pode diferir dunha calculadora a outras. Algunhas amosan o erro con menos iteracións que outras e incluso hai algunhas que non amosan erro algún sexa cal sexa o número de iteracións que se fagan.

## Exercicio 2.2:

Tomando o valor  $\pi = 3'1415926535$  como referencia, estuda o erro que se comete ó calcular a área dun círculo de radio 10 utilizando diferentes aproximacións:

a) Cálculo do valor referencia:  $\pi = 3'1415926535$   $\rightarrow S = \pi \cdot 10^2 =$

b)  $\pi = 3'14 \rightarrow S =$  Erro =

c)  $\pi = 3'1416 \rightarrow S =$  Erro =

**Solución:** Calculamos o valor referencia:

$\pi = 3'1415926535$   $\rightarrow S = \pi \cdot 10^2 = 314'1592653589$

$\pi = 3'14 \rightarrow S = 3'14 \cdot 10^2 = 314$  Erro =  $0'15926535$  ...

$\pi = 3'1416 \rightarrow S = 3'1416 \cdot 10^2 = 314'16$  Erro =  $-0'0007346$  ...

O valor exacto do erro non ten moito interés ou non se pode calcular, polo que utilizamos simplemente unha cota do mesmo:

$\pi = 3'14 \rightarrow \text{Erro} = 0'2$

$\pi = 3'1416 \rightarrow \text{Erro} = -0'0008$

## Unidade 2: Solucións das actividades e exercicios

### Actividades 2.3:

Completa as secuencias seguintes:

$$\text{a) } \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot (2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}) \cdot (2-\sqrt{5})} = \frac{2-\sqrt{5}}{4-5} = -2+\sqrt{5}$$

b)

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

### Exercicio 2.3:

Calculando as raíces exactas e transformando outras para que coincidan, simplifica:

$$-27+21\sqrt{2}+9\sqrt{8}-7\sqrt{16}=$$

$$-27+21\sqrt{2}+9\sqrt{2^3}-7 \cdot 4 = -27+21\sqrt{2}+9 \cdot 2\sqrt{2}-28 = -55+39\sqrt{2}$$

### Actividade 2.4:

Completa:

$$(2+\sqrt{2}) \cdot (5-\sqrt[3]{4}) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \cdot 5 - \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 10 - 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt{2} - \sqrt[6]{2^3 \cdot 4^2}$$

### Actividade 2.5:

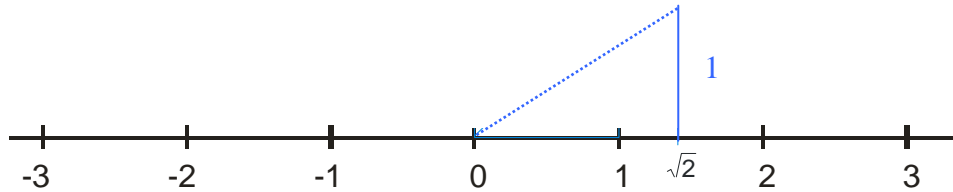
Completa:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3}) \cdot (4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3}) \cdot (4+\sqrt{3})} = \frac{8+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{16-3} = \frac{11+6\sqrt{3}}{13}$$

## Unidade 2: Solucións das actividades e exercicios

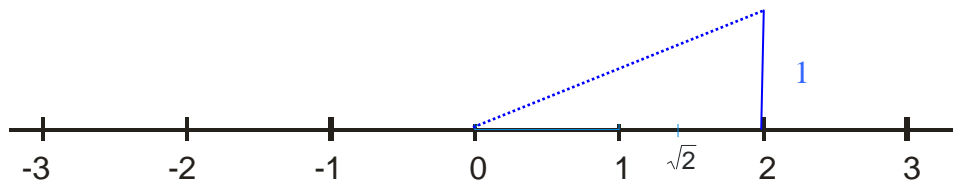
### Actividade 2.6:

a) Calcula a hipotenusa do triángulo rectángulo e, sinalaa na recta o punto que lle corresponde:



$$h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

b) Fai unha construción semellante para o número  $\sqrt{5}$  e sitúao na recta.



$$h = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

### Exercicio 2.4:

Atopar dous números reais distintos entre cada par dos seguintes:

a)  $2/3451$  y  $2/3461$ . Podemos escoller:  $\frac{2}{3455}$

b)  $-3/125$  y  $-3/124$ . Podemos escoller:  $-\frac{30}{1245}$

c)  $4'265$  e  $4'266$ . Podemos escoller:  $4'2655$

Outro xeito de contestar sería, por exemplo, escoller a media dos dous:

$$\frac{\frac{2}{3451} + \frac{2}{3461}}{2} = \frac{\frac{2 \cdot 3461 + 2 \cdot 3451}{3451 \cdot 3461}}{2} = \frac{3451 + 3461}{3451 \cdot 3461} = \frac{6912}{11943911}$$

Podemos comprobar que efectivamente está entre os valores orixinais simplemente facendo as divisións ou reducindo as fraccións a común denominador:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3461} &= \frac{2 \cdot 3451}{3461 \cdot 3451} = \frac{6902}{11943911} \\ \frac{2}{3451} &= \frac{2 \cdot 3461}{3451 \cdot 3461} = \frac{6922}{11943911} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2}{3461} < \frac{6912}{11943911} < \frac{2}{3451}$$

### Actividade 2.7:

Eso de que entre dous números reais diferentes sempre hai outro (densidade) pode parecer unha obviedade (basta considerar a media) pero non é tan doado como pode parecer.

Os números  $0.\widehat{9}$  e  $1 = 1.\widehat{0}$  semellan diferentes, ¿podes atopar algún entre eles?