

Resumo

Invención dos números:

Proceso histórico

$$\mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{Negativos e } 0 \Rightarrow \mathbb{C}$$

Proceso matemático

Naturais	Enteiros	Racionais	Reais	Complexos
\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}	\mathbb{C}
Non sempre se pode restar	Non sempre se pode dividir	Non enche toda a recta	Asecuacións polinómicas poden non ter solución	

Números racionais \mathbb{Q}

Son os que poden poñerse como cocientes de números enteiros.

O seu desenvolvemento decimal ten un número finito de cifras ou é periódico.

Represéntanse sobre unha recta, pero non tódolos puntos da recta corresponden a números racionais.

Números reais \mathbb{R}

Formados por tódolos desenvolvementos decimais. Poden ser finitos ou periódicos (racionais) ou ben cun número infinito de cifras decimais e que non se repitan de xeito periódico (irracionais, como $\sqrt{2} = 1'4142135623\ 7309504880\ 1\dots$).

Se sobre unha recta eliximos unha orixe a unha escala (os puntos correspondentes a 0 e a 1), cada punto da recta corresponde a un número real e cada número real corresponde a un punto da recta.

Aproximacións e erros

Para manexar os números reais, en especial os irracionais, utilízanse aproximacións que construímos redondeando e cortando o seu desenvolvemento decimal.

Esas aproximacións determinan a existencia dun erro que debemos ter en conta, elixindo a aproximación coa precisión axeitada para cada caso.

Números irracionais destacados

Alxébricos: Números da forma $a \pm \sqrt[n]{b}$. Aparecen en moitas ocasións como resultado de cálculos ou raíces de ecuacións.

Número áureo: Relación entre os lados dun “rectángulo perfecto” e tamén entre a diagonal e o lado dun pentágono regular $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1'61803\dots$

Número π : 3'141592...Razón entre a lonxitude da circunferencia e o seu diámetro.

Número e: 2'7182818284...Base dos logaritmos neperianos e das funcións exponenciais “naturais”.

Notación científica

Consiste en representar ós números mediante unha parte decimal cunha soa cifra enteira, multiplicada por unha potencia de 10 (Masa do electrón: $9.10833 \cdot 10^{-28}$ g).

Utilízase para representar cantidades moi grandes ou moi próximas a 0.

Permite comparar facilmente o valor de varias magnitudes.

Opérase por separado a parte decimal e a parte de potencia. Para sumar números en notación científica, os expoñentes das potencias de 10 deben ser iguais.

Operacións con potencias e raíces

Produto de potencias da mesma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. (súmanse os expoñentes).

Cociente de potencias da mesma base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. (réstanse os expoñentes).

Potencias de expoñente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potencia de expoñente 0: $a^0 = 1$ (calquera que sexa $a \neq 0$).

Potencia dunha potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (multiplícanse os expoñentes).

Definición de raíz: Chamámoslle raíz n-esima dun número a , e escribiremos $\sqrt[n]{a}$, a un número r que cumpre: $r^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}$

Simplificación de radicais: $\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$

Potencias de expoñente fraccionario: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Produto de radicais do mesmo índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Suma de radicais: Só coa mesma parte radical: $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x + y)\sqrt[n]{a}$

Cociente de radicais co mesmo índice: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Potencia dunha raíz: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Raíz doutra raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Operacións con radicais coa mesma base: Transfórmanse en potencias de expoñente e aplícanse as regras destas: $\sqrt[n]{a^x} \cdot \sqrt[m]{a^y} = a^{\frac{x}{n}} \cdot a^{\frac{y}{m}} = a^{\frac{x}{n} + \frac{y}{m}}$

Racionalización: Trátase d eliminar radicais do denominador. Conséguese multiplicando numerador e denominador por un número ou unha expresión axeitada:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{2}.$$

A recta real

Os números reais pódense representar nunha recta, a **recta real**.

- *Densidade*, é dicir, entre cada dous números reais distintos sempre podemos atopar outro número real.
- *Compleitude*, os números reais non deixan ocos na recta. A cada punto da recta correspóndelle un número real.

Intervalos

Algúns conxuntos de números reais poden expresarse como anacos ou segmentos da recta, a estes anacos chamámoslles *intervalos*:

- **Intervalo pechado $[a,b]$** . os números reais entre a e b , incluíndo o a e o b .
- **Intervalo aberto (a,b)** . os números reais entre a e b , excluindo o a e o b .
- **Intervalos semiabertos ou semipechados**. Só un dos extremos está no intervalo.

A característica fundamental que diferenza un intervalo aberto dun pechado é que no aberto non están incluídos os extremos.

Valor absoluto, distancias e entornos

O **valor absoluto** dun número real é o seu valor excluindo o signo.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Cando o número é negativo, cambiámolo de signo, e cando é positivo, deixámolo igual

O valor absoluto verifica as seguintes propiedades, calquera que sexan os reais a e b :

- $|a| \geq 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. (desigualdade triangular).

Distancia entre dous números: é o valor absoluto da súa diferenza $d(a,b) = |b - a|$

Entorno de centro un número a e radio $r > 0$: é o conxunto de números reais que súa distancia ao centro é menor co radio: $E(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$

Podemos escribir un entorno en forma de intervalo: $E(a,r) = (a - r, a + r)$