

Unidade 2: Os números reais

1. Os números

1.1. A necesidade de contar: Os números naturais.

1.2. As medidas: Números racionais.

1.3. Os reais.

2. Representación gráfica dos números reais: A recta real.

3. Algúns números reais destacados.

4. Diferentes notacións: Decimal, científica.

5. Operacións con números reais: As potencias

6. Aproximacións e erros.

Introdución

A invención dos números

A invención dos números e os sistemas de numeración foi un proceso que se desenvolveu paralelamente á invención da linguaxe.

Moi probablemente, os primeiros homes empezaron por inventar “nomes” para as cousas e animais que necesitaban ou que temían, tal como sigue acontecendo cos nenos ó empezar a falar.

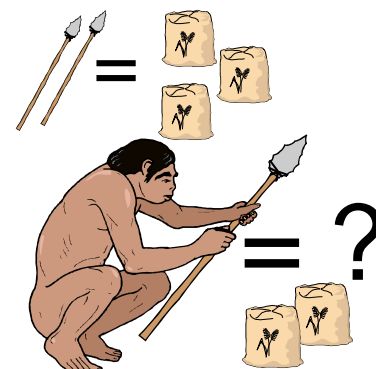
Os conceptos abstractos, coma os números, tiveron que ser froito dun proceso moito máis complexo. Do que acontece coas culturas primitivas que sobreviven na actualidade, podemos deducir que os números empezaron como partículas que se engadían ós substantivos para indicar de cantos se trataba (algo semellante a **bicicleta**, **triángulo**).

Os naturais

Só moito máis adiante os nosos antecesores deberon ser capaces de separar o que tiñan en común todos os grupos de obxectos concretos que designaría como *bi-....* (*bi-cabalos*, *bi-arbres*, *bi-leóns*, *bi-homes*,) e manexar a idea abstracta de número (o número dous neste caso) **inventando** unha palabra para nomealo. Se cadra foi así como naceron os números naturais.

Os racionais

Co desenvolvemento da cultura e do comercio, os números naturais xa non podían cubrir tódalas necesidades: se tres ferrados de millo intercámbianse por dúas lanzas de pedernal, ¿a canto millo equivale unha lanza?; ¿como facer se o ancho dunha leira mide máis de dúas varas e menos de



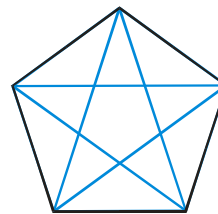
tres?; e moitas outras situacións. O ser humano tivo que inventar as fraccións e aprender a facer operacións con elas.

Os irracionais

Na Grecia Clásica dábaselle un enorme valor ós números naturais. Eran sinxelos de manexar e comprender pero, a pesares da súa simplicidade, tódalas cantidades e medidas podían representarse con números naturais ou cocientes de números naturais –*fraccións*- (ou iso era o que eles pensaron durante algún tempo). Chegaron a construír unha especie de mística ó redor deses números.

As cousas cambiaron cando descubriron que algúns números como o número áureo ou a medida da diagonal dun cadrado de lado 1 non podían poñerse en forma de cocientes de números naturais. Eran os irracionais.

O descubrimento dos irracionais ocasionou unha enorme frustración que desencadeou que o interese “filosófico” dos gregos polas Matemáticas se dirixise á Xeometría, quedando relegada a Aritmética ós asuntos da vida cotiá.



A estrela de 5 puntas era o emblema dos pitagóricos e o símbolo da perfección.

A relación entre o seu lado e o do pentágono é o número áureo:

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1'61803...$$

Os negativos e o 0

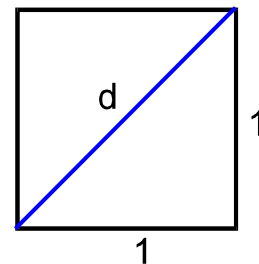
Aínda que se podían idear operacións que daban como resultado 0 ou algún valor negativo, tales números non se consideraban como realmente existentes, senón unicamente artificios técnicos. Coa chegada dos árabes, que trouxeron a Occidente os coñecementos da China e da India, introdúcense os negativos e o 0.

Números reais

Números racionais son os que poden poñerse como cocientes de números enteiros. O seu desenvolvemento decimal é finito ou periódico:

$$-\frac{1}{3} = -0'3333... = -0\hat{3} \quad \frac{7}{4} = 1'75$$

Quizais o número non racional máis doado de representar sexa o que expresa a medida da diagonal dun cadrado de lado 1:



Polo Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Escribindo o desenvolvemento decimal dese número resulta:

$$\sqrt{2} = 1'4142135623\ 7309504880\ 1688724209\ 6980785696\ 7...$$

Ese desenvolvemento decimal **non remata** e as súas cifras **non se repiten de xeito periódico**. $\sqrt{2}$ non é un número racional, pois non pode expresarse como cociente de números enteiros pero, por outra banda, parece claro que $\sqrt{2}$ representa unha medida *real* (a da diagonal do cadrado).

Ó conxunto formado polas lonxitudes de tódolos segmentos posibles e polos opostos deses números recibe o nome de **conxunto dos números reais**.

Os números reais engloban ós racionais e, tamén, a moitos outros chamados **irracionais**.

Calquera desenvolvemento decimal que podamos imaxinar corresponde a un número real e todo número real ten un desenvolvemento decimal.

Actividade 2.1:

a) Vimos que a mediada da diagonal dun cadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$ e que ese número non é racional. Como construírías, seguindo o método anterior, un segmento que mida $\sqrt{3}$, que tampouco é racional.

b) Que sentido ten falar de infinitas cifras decimais?

Existen na realidade eses números reais?

c) No texto aparece o desenvolvemento decimal de $\sqrt{2}$ con 40 cifras exactas. Pareceche posible medir algo con tanta precisión? Imos comparalo con dimensións do átomo:

Diámetro: 10^{-8}cm

Diámetro do núcleo: 10^{-12}cm

Carga dun electrón: $1'602 \cdot 10^{-19}\text{coulombs}$

Masa do electrón: $9'10833 \cdot 10^{-28}\text{g}$

Escribe os números anteriores en forma decimal.

Algúns números irracionais

Números alxébricos: os que se obteñen como raíces de ecuacións polinómicas. Por exemplo: $\sqrt{2}$ (solución da ecuación $x^2 - 2 = 0$) e todos os radicais.

O número π : É a relación entre a lonxitude dunha circunferencia e seu o diámetro. Como a circunferencia era considerada a “curva perfecta”, coidábase que π era un número racional e intentouse calcular o seu valor exacto.

Lindemann (1852-1939) demostrou que π non é alxébrico (non pode ser solución de ecuacións da forma $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$).

Na actualidade, mediante aproximacións sucesivas podemos calcular π con tantos decimais como se queira. O cálculo de aproximacións de π utilízase para probar a capacidade dos superordenadores e xa se ten chegado a 10^9 decimais.

No desenvolvemento decimal de π as súas cifras non parecen seguir ningunha regra, van xurdindo ao chou. Como consecuencia, calquera secuencia de números que nos podamos imaxinar, sexa cal sexa a súa lonxitude, podería ser encontrada no desenvolvemento de π .

O número e : Antes da invención dos aparellos de cálculo, facer operacións complexas como divisións, raíces, etcétera, era moi complicado. Descubriuse que escribindo os números en forma de potencia, esas operacións podíanse facer de xeito máis doado:

Exemplo:

Como calcular $\sqrt[3]{34'8} = ?$

1. Eleximos un número para a base, 10 por exemplo, e poñemos 34'8 como potencia: $34'8 = 10^{1'5416}$
2. $\sqrt[3]{34'8} = (34'8)^{\frac{1}{3}} = (10^{1'5416})^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1'5416}{3}} = 10^{0'5139}$
3. Calculamos o valor desa potencia: $10^{0'5139} = 3'2651$

Unha raíz cúbica, que non podíamos calcular, transfórmase nun cociente.

Para escribir os números en forma de potencia (1) e calcular rapidamente o valor dunha potencia (3) utilizábanse as *táboas de logaritmos*, nelas anotábanse as potencias dun número fixo (base) pacientemente calculadas.

Sorprendentemente –xa que o noso sistema de numeración ten base 10-, o número que permite calcular máis facilmente esas táboas non é o 10, senón un número irracional descuberto polo escocés John Neper (1550-1617): o número e , de valor 2'7182818284...

Ese número pode calcularse con toda a precisión que desexemos dándolle

valores cada vez maiores a n na expresión: $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercicio 2.1:

Completa a táboa utilizando a calculadora para e :

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
1000	
10000	

Exercicio 2.2:

- a) Coa axuda da calculadora e a expresión $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, averigua o valor do número e con 8 cifras exactas.
- b) Cambiando o signo máis da expresión entre paréntesis, obtemos un novo número. Calcúlao e comproba se ten algunha relación co número e .

Actividade 2.2:

A túa calculadora é un instrumento marabilloso que permite realizar multitude de cálculos cunha enorme precisión, pero non é perfecta. Intenta descubrir os seus límites calculando:

1º paso:	2º paso: desfacendo o camiño
a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$	$\left(\left(\left(\left(\text{resultado anterior}\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = ?$
b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}}$	$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\text{resultado anterior}\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 = ?$
c)

¿Cales deberían ser os resultados?

Lembra: debes facer todos os cálculos sen volver a escribir os números.

Aproximacións e erros

Os números racionais podemos manexalos co seu valor exacto mediante unha fracción e, nalgúns casos, mediante un desenvolvemento decimal pero, na maioría das ocasións, non podemos empregar o valor exacto dun número real. O mesmo sucede cando se mide unha magnitude: é imposible coñecer a súa medida exacta e non só porque a precisión dos instrumentos de medida

é limitada, tamén pola propia natureza do Universo (Principio de Indeterminación de Heisemberg).

En xeral, ó utilizar un número real só precisamos dunha parte do seu desenvolvemento decimal redondeando o resto das cifras por defecto ou por exceso.

Cifras significativas: número de cifras exactas que utilizamos para describir unha magnitude ou un valor numérico.

O número de cifras significativas que podemos utilizar depende da necesidade da situación que queiramos describir e da precisión das medidas de que dispoñamos (dicimos que unha persoa mide 1'65 utilizando 3 cifras significativas).

Erro absoluto: diferenza entre o valor real e o valor aproximado:

$$\text{Erro absoluto} = | \text{Valor real} - \text{valor aproximado} |$$

Normalmente, non poderemos coñecer exactamente o erro pero si poderemos dar unha estimación do seu valor:

Valor exacto	Aproximación	Erro	Erro aprox.
$\frac{1}{2}$	0'5	0	
$\sqrt{2}$	1'4142	0'000013...	+0'00005
π	3'1416	-0'0000073..	-0'00005
Radio medio da Terra	6378km	descoñecido	≈ 1

Exercicio 2.3:

Estuda o erro que se comete ó calcular a área dun círculo de radio 10 utilizando diferentes aproximacións para π .

a) Cálculo do valor exacto: $\pi = 3'1415926535 \dots \rightarrow S = \pi \cdot 10^2 =$

b) $\pi = 3'14 \rightarrow S =$ Erro =

c) $\pi = 3'1416 \rightarrow S =$ Erro =

Outro aspecto a ter en conta cando se utilizan aproximacións é o valor da magnitude. Non ten a mesma importancia un erro de 1 km na distancia entre A Coruña e Pontevedra (≈ 120 km) que o mesmo erro de 1 km na medida do radio da Terra (≈ 6378 km).

Erro relativo: erro por unidade. Utilízase para comparar erros nos valores de

magnitudes diferentes: $\text{Erro relativo} = \frac{\text{Erro absoluto}}{\text{Valor real}}$

O erro relativo permítenos comprobar que a precisión coa que se mediu o radio da Terra é 40 veces maior ca precisión na medida da distancia A Coruña-Pontevedra:

Valor	Erro absoluto	Erro relativo
120	1	0'008

6378	1	0'0002
------	---	--------

Notación científica

A notación científica é un xeito de escribir cantidades. Consiste en poñelas como produto dun número, cunha parte enteira dunha cifra, por unha potencia de dez.

Utilízase para manexar números moi grandes ou moi pequenos, ou para comparar rapidamente os valores de diferentes magnitudes.

Magnitude	Notación decimal	Notación científica
Diámetro da Terra	12.756 km	$1'2756 \cdot 10^4$ km
Diámetro de Xúpiter	120.536 km	$1'20536 \cdot 10^5$ km
Velocidade dun coche	90 km/h 25 m/s	$2'5 \cdot 10^1$ m/s
Velocidade da luz	300.000.000 m/s	$3 \cdot 10^8$ m/s
Diámetro dunha célula	0'0000001 m	10^{-7} g
Poboación da Terra	4.500.000.000	$4'5 \cdot 10^9$

Coa notación científica é doado decatarse de que o diámetro de Xúpiter é unhas 10 veces maior co da Terra, de que a velocidade da luz é 10^7 (10 millóns) veces maior ca dun coche, ou de que fan falla 10 millóns de células postas en liña para medir un metro.

Para transformar un número en notación científica a notación decimal só debemos desprazar a coma cara a dereita (cara a esquerda se o expoñente é negativo) tantos lugares coma indica a potencia de 10 (engadindo ceros, se non houbese cifras dabondo).

Notación científica	Notación decimal
$-1'364 \cdot 10^5$	-136.400
$3'04 \cdot 10^{-3}$	0'00304

Operacións con potencias e raíces

As potencias e raíces de números reais verifican as mesmas propiedades que as de números racionais que xa nos son coñecidas:

Potencia de expoñente natural: multiplícase a base por si mesma tantas veces como indica o expoñente:

$$a^n = \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ veces}}}{a \cdot \dots \cdot a}$$

Producto de potencias da mesma base: para multiplicar potencias da mesma base basta suma-los expoñentes:

$$a^n \cdot a^m = \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ veces}}}{(a \cdot \dots \cdot a)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ m \text{ veces}}}{(a \cdot \dots \cdot a)} = a^{n+m}$$

Potencia dunha potencia: Multiplícanse os expoñentes

$$(a^n)^m = \underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ veces}} = a^{n \cdot m}$$

Cociente de potencias da mesma base: réstanse os expoñentes

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ veces}}}{\underbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ veces}}} = a^{n-m}$$

Potencias de expoñente negativo: É a inversa da potencia elevada a expoñente positivo (Dedúcese da propiedade anterior cando o expoñente do numerador é menor co do denominador): $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Potencia de expoñente 0: calquera número (agás o 0) elevado a 0 é igual a 1 (é unha *convención* para mante-la coherencia co cociente de potencias da mesma base): $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

Definición de raíz: Chamámoslle raíz n -esima dun número a , e escribiremolo $\sqrt[n]{a}$, a outro número r que cumpre: $r^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}$ (fíxate que radicación e potenciación son operacións inversas o que implica que teñan propiedades semellantes).

Raíces equivalentes:

$$\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ pois } r^{n \cdot q} = a^{n \cdot p} \Leftrightarrow (r^q)^n = (a^p)^n \Leftrightarrow r^q = a^p$$

Potencias de expoñente fraccionario: Da definición de raíz dedúcese que podemos escribir unha raíz como unha potencia de expoñente fraccionario.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \text{ pois } \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^n.$$

Producto de raíces do mesmo índice: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Cociente de raíces do mesmo índice: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Potencia dunha raíz: Elévase a cantidade subradical á potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \text{ pois } (\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Raíz doutra raíz: é outra raíz de índice o produto dos índices

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n \cdot m]{a} \text{ pois } \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Operacións con raíces coa mesma base: Transfórmanse en potencias de

expoñente fraccionario e aplícanse as mesmas regras que coas potencias.

Racionalización: Cando nunha fracción aparece un radical no denominador, chámase racionalizar a atopar outra fracción equivalente pero sen radicais no denominador.

Ten en conta que para obter unha fracción equivalente só podes multiplicar numerador e denominador polo mesmo número.

Actividade 2.3:

Completa as secuencias seguintes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{2+\sqrt{5}} &= \frac{1 \cdot (2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}) \cdot (2-\sqrt{5})} = \frac{2-\sqrt{5}}{4-5} = -2 + \sqrt{5} \\ \text{b) } \frac{2}{\sqrt[3]{2}} &= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \end{aligned}$$

Operacións con números radicais

Os números radicais son irracionais que podemos manexar co seu valor exacto utilizando a súa expresión en forma de raíz.

A súa expresión xeral é $a + \sqrt[n]{b}$ (a e b números reais e n un número natural)

Suma de radicais: Para podermos sumar números radiais deben te-la mesma parte radical. De non ser así, en ocasións, poderemos utiliza-la propiedade anterior para que si a teñan

Exemplo:

$$(-3 + \sqrt{8}) + (9 - 7\sqrt{2}) = (-3 + \sqrt{2^2 \cdot 2}) + (9 - 7\sqrt{2}) = (-3 + 2\sqrt{2}) + (9 - 7\sqrt{2}) = 6 - 5\sqrt{2}$$

Producto: Utilízanse as propiedades das operacións con raíces e potencias.

Actividade 2.4:

Completa:

$$(2 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt[3]{4}) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \cdot 5 - \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 10 - 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$$

Cociente: Racionalízase transformándose nun produto de radicais divididos por un número real.

Actividade 2.5:

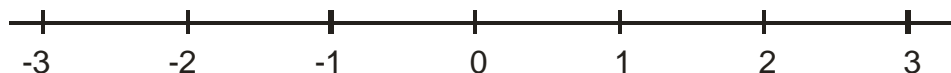
Completa:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3}) \cdot (4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3}) \cdot (4+\sqrt{3})} = \frac{\quad}{16-3} =$$

A recta real

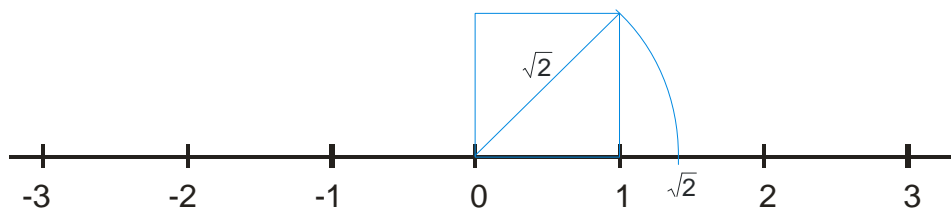
Os números reais, ao igual que os números racionais, tamén se poden representar nunha recta, a **recta real**.

Tamén poñemos os positivos á dereita, os negativos á esquerda.



A representación dos números irracionais non sempre é sinxela, algunhas veces é imposible facelo exactamente, aínda que hai algúns casos en que si se pode facer dun xeito sinxelo.

Para representar na recta o número $\sqrt{2}$ podemos utilizar o teorema de Pitágoras para construír un segmento que mida exactamente ese número:



Os números reais, ao igual que acontece cos números racionais, teñen a propiedade de *densidade*, é dicir, entre cada dous números reais distintos sempre podemos atopar outro número real pero, a diferenza dos números racionais, os números reais non deixan ocos na recta: a cada punto da recta correspóndelle un número real. Neste sentido, dise que \mathbb{R} é *completo*.

Actividade 2.6:

Inventa o teu propio número irracional entre 0 e 10 e indica nunha recta onde está situado.

Exercicio 2.4:

Atopar dous números reais distintos entre cada par dos seguintes:

- a) $\frac{2}{3451}$ y $\frac{2}{3461}$. b) $-\frac{3}{125}$ y $-\frac{3}{124}$. c) $4'265$ e $4'266$

Actividade 2.7:

Eso de que entre dous números reais diferentes sempre hai outro (densidade) pode parecer unha obviedade (basta considerar a media) pero non é tan doado como pode parecer.

Os números $0.\widehat{9}$ e $1.\widehat{0}$ semellan diferentes, ¿podes atopar algún entre

eles?

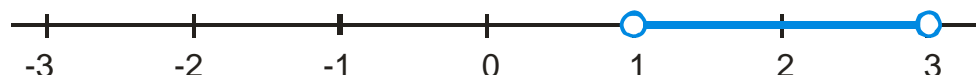
Intervalos

Para describir conxuntos de números reais, resulta útil ás veces expresalos como anacos ou segmentos da recta, a estes anacos chamámoslles *intervalos*, cuxos diferentes tipos describimos a continuación:

Intervalo pechado. Por exemplo, o intervalo $[-1,2]$, son todos os números reais que hai entre -1 e 2, incluídos o -1 e o 2. Gráficamente, son os puntos da figura:



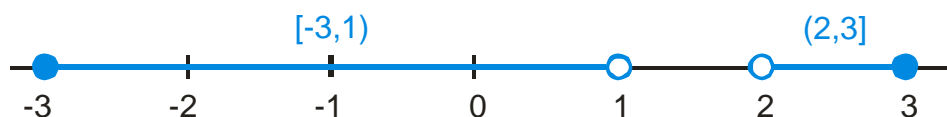
Intervalo aberto. Por exemplo, $(1,3)$ son todos os números reais que hai entre 1 e 3, sen incluír os extremos.



A característica fundamental que diferencia un intervalo aberto dun pechado é que no aberto non están incluídos os extremos.

Tamén se poden considerar intervalos semiabertos ou semipechados que inclúan unicamente un dos extremos.

Exemplo: $(2, 3]$ no que se inclúe o 3, pero non o 2; o intervalo $[-3, 1)$ en o que se inclúe o -3, pero non se inclúe o 1, etc.



Mesmo se poden considerar intervalos de lonxitude infinita.

Exemplo:

$(-\infty, 3]$ son todos os números reais menores ou iguais que 3,

Exemplo:

O intervalo $(2, +\infty)$ son todos os números reais estrictamente maiores que 2.

Recordamos que ∞ é o símbolo que se utiliza para representar a idea de infinito e non é un número que se atope na recta, por iso non o incluimos nos intervalos. A propia recta real pódese expresar como o intervalo $(-\infty, +\infty)$

Exercicio 2.5:

Expressar como intervalos os conxuntos de números reais x que verifican as seguintes condicións:

- a) $x \geq 0$ b) $-1 < x \leq 5$ c) $-3 < x < 3$ d) $4 \geq x$.

Valor absoluto, distancias e entornos

O **valor absoluto** dun número real x é o maior entre x e $-x$, denótase $|x|$.

Por exemplo, $|5| = 5$ e $|-3| = 3$.

Tamén se pode definir, dunha forma máis precisa $|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

O que significa que cando o número é negativo, cambiámolo de signo, e cando é positivo, deixámolo tal e como está.

O valor absoluto verifica as seguintes propiedades:

Calquera que sexan os números reais a e b :

- $|a| \geq 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. Esta propiedade, que se chama desigualdade triangular, expresa que o valor absoluto dunha suma é menor ou igual que a suma dos valores absolutos.

Actividade 2.6

Describir os conxuntos de números reais x que verifican as seguintes condicións, utilizando intervalos se é preciso:

- a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \geq 2$.

Unha das utilidades do valor absoluto é para expresar a idea de **distancia** entre dous números reais, a distancia entre os números reais a e b é a diferenza entre o maior e o menor. Como non sabemos cal deles é maior, se restamos $b-a$ poderíamos obter un número positivo ou negativo, pero as distancias han de ser sempre positivas, por esta razón, defínese a distancia entre a e b como o número $|b-a|$.

Exemplo:

Distancia entre -3 e 5 : $|5 - (-3)| = |8| = 8$ ou ben, $|-3 - 5| = |-8| = 8$

Chámase **entorno** de centro o número a e radio r (un número maior ca 0) ao conxunto de números reais que están a unha distancia do a , centro do entorno, menor que r . Simbolicamente, $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$

Tamén se pode expresar directamente como o intervalo $E(a, r) = (a - r, a + r)$.

Exercicio 2.6:

Expresar en forma de intervalo o ámbito de centro 4 e radio 3.

Ampliación

$\sqrt{2}$ non é racional

Un dos métodos máis habituais para levar adiante unha demostración é *por redución ó absurdo*: Suponse que algo é verdadeiro e inténtase chegar a unha contradición.

Ese é o método que empregaremos neste caso: Supoñemos que $\sqrt{2}$ é un número racional, que pode escribirse como un cociente de números enteiros: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, e que esa fracción é

irreducible (de tódalas fraccións de números enteiros que corresponden a un número racional, sempre hai unha irreducible.).

Elevamos ó cadrado a anterior igualdade: $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$.

Obtemos que p^2 é múltiplo de 2 e, polo tanto, p tamén ten que ser múltiplo de 2: $p=2n$

Substituíndo: $(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2$ (q^2 é múltiplo de 2 e q tamén: $q=2m$)

Obtivemos que a fracción non é irreducible: $\frac{p}{q} = \frac{2n}{2m} = \frac{n}{m}$ o que é unha contradición.

Cantos irracionais hai?

Podemos contar os números racionais seguindo a orde que aparece no cadro. Dese xeito podemos dicir que hai, alomenos, tantos números naturais coma racionais (fíxate que contamos tódolos números racionais e que contamos cada número racional infinitas veces).

Polo dito ata agora, podes ter a idea de que os irracionais son poucos, nada máis lonxe da realidade: hai moitos máis irracionais que racionais, ... pero ¿cantos máis? ¿Hai tamén tantos reais coma naturais? ¿Podemos contar os números reais?

Supoñamos que si podamos contalos. teríamos tódolos números reais numerados:

$$1 \rightarrow r_1$$

$$2 \rightarrow r_2 \quad r_1, r_2, \dots \text{ números reais}$$

...

Consideremos o desenvolvemento decimal que empeza por 0'... e ten a 1ª cifra decimal distinta da 1ª cifra decimal de r_1 , a 2ª cifra distinta da 2ª de r_2 , a 3ª distinta da 3ª de r_3 , ... Ese número real que acabamos de inventar **non** está contado, non coincide con ningún número real da anterior numeración. Chegamos a un absurdo, non podemos contar os números reais.

Hai máis reais ca naturais. De feito, hai infinitas veces máis números reais ca naturais.

Hai infinitos números naturais (é o *primeiro infinito* \aleph_0) e hai "infinitas veces infinito" números reais (é o 2º infinito: $\aleph_1 = \aleph_0^{\aleph_0}$).

	0	1	2	3	4	...
1	0	1	2	3	4	...
2	1	1	1	1	1	...
3	0	1	2	3	4	...
4	0	1	2	3	4	...
...