

## Exercicios de autoavaliación

### Exercicio nº 1.-

Calcula a)  $\int (x^3 + 4x^2 + 7x) dx$  ; b)  $\int (-x^2 + 9x + 1) dx$

### Exercicio nº 2.-

Acha a)  $\int (6x^3 - 5x^2 + \sqrt{x}) dx$  ; b)  $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} \right) dx$

### Exercicio nº 3.-

Calcula a)  $\int (x^3 + 1)(x^2 - 1) dx$ ; b)  $\int 4x(7x^2 - 5)^3 dx$ .

### Exercicio nº 4.-

Descubre a)  $\int 3x \cos x^2 dx$ ; b)  $\int \frac{4}{5 + 8x} dx$ .

### Exercicio nº 5.-

Calcula a)  $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{8x^2 + 1}} dx$ ; b)  $\int 3xe^{-x^2} dx$ .

### Exercicio nº 6.-

Calcula  $\int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx$ , onde  $|x|$  indica o valor absoluto x

### Exercicio nº 7.

Acha a área da rexión plana acoutada limitada pola gráfica da función

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

o eixe de abscisase as rectas  $x=1$ ,  $x=3$

### Exercicio nº 8.

Nunha parede azul de 8 m de altura quérese pintar de branco a figura que encerran as funcións  $y = -x^2 + 3x + 4$  e  $y = 2x^2 - 3x + 4$ , ambas as dúas definidas en metros.

- Cantos metros cadrados hai que pintar de branco?
- Se a parede ten 23 m de lonxitude e querq repetirse a figura deixando 5 m enter cada unha delas, canto custaría pintar esesas figuras, se cada metro cadrado de branco custa 2 €?

**Exercicio nº 9.**

Acha a área encerrada por  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ , a recta  $x=5$  e a función  $g(x)=\frac{1}{x}$

**Exercicio nº 10.**

Determina o valor de  $a>0$  para que a área da rexión plana acoutada limitada polas gráficas das curvas  $y=x^3$  e  $y=ax$  sexa igual a  $4u^2$

**Exercicio nº 11.**

Descubre a área do recinto limitado pola gráfica de  $y=x^3+5x^2+2x-8$  e o eixe OX.

**Exercicio nº 12.**

A parte superior dunha parede de 2m de base ten unha forma parabólica determinada pola expresión  $-0,5x^2+x+1$ , onde  $x$  mide a lonxitude en metros dende a parte esquerda da parede. Calcula a superficie da parede utilizando unha integral

## Solucións dos exercicios

### Exercicio nº 1.-

$$\text{a) } \int (x^3 + 4x^2 + 7x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + k; \quad \text{b) } \int (-x^2 + 9x + 1) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + k.$$

### Exercicio nº 2.-

$$\text{a) } \int (6x^3 - 5x^2 + \sqrt{x}) dx = \frac{3x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k; \quad \text{b) } \int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} \right) dx = 6\sqrt{x} + 4\ln x + k.$$

### Exercicio nº 3.-

$$\text{a) } \int (x^3 + 1)(x^2 - 1) dx = \int (x^5 - x^3 + x^2 - 1) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x + k;$$

$$\text{b) } \int 4x(7x^2 - 5)^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 7x^2 - 5 \\ u' = 14x \Rightarrow dx = \frac{du}{14x} \end{array} \right\} = \int 4x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{14x} = \frac{2}{7} \int u^3 du = \frac{1}{14} u^4 + k = \frac{(7x^2 - 5)^4}{14} + k.$$

### Exercicio nº 4.-

$$\text{a) } \int 3x \cos x^2 dx = \frac{3}{2} \sin x^2 + k; \quad \text{b) } \int \frac{4}{5+8x} dx = \frac{1}{2} \ln(5+8x) + k.$$

### Exercicio nº 5.-

$$\text{a) } \int \frac{2x}{\sqrt[3]{8x^2+1}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 8x^2 + 1 \\ u' = 16x \Rightarrow dx = \frac{du}{16x} \end{array} \right\} = \int 2x \cdot u^{-1/3} \cdot \frac{du}{16x} = \frac{1}{8} \int u^{-1/3} du = \frac{3}{16} u^{2/3} + k = \frac{3(8x^2+1)^{2/3}}{16} + k;$$

$$\text{b) } \int 3xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2} e^{-x^2} + k.$$

### Ejercicio nº 6.-

$$\int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx \Rightarrow |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^1 (|x| + x + 1) dx = \int_{-1}^0 (-x + x + 1) dx + \int_0^1 (x + x + 1) dx = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 (2x + 1) dx =$$

$$= x \Big|_{x=-1}^{x=0} + x^2 + x \Big|_{x=0}^{x=1} = 1 + 2 = 3.$$

**Exercicio nº 7.-**

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x \leq 0 \\ x-1, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x-5, & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Como os límites de integración son } x=1 \text{ e } x=3, \text{ integramos}$$

$$f_1(x) = x-1, f_2(x) = 3x-5 \Rightarrow f_1(x) = 0 \Rightarrow x = 1; f_2(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} < 2$$

. A función é continua en  $x=2$  pois

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-5) = 1.$$

Á área vale :

$$A = \left| \int_1^2 (x-1) dx \right| + \left| \int_2^3 (3x-5) dx \right| \Rightarrow F_1(x) = \frac{x^2}{2} - x \Rightarrow \begin{cases} F_1(1) = -\frac{1}{2} \\ F_1(2) = 0 \end{cases}; F_2(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x \Rightarrow \begin{cases} F_2(2) = -4 \\ F_2(3) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 u^2.$$

**Exercicio nº 8.-**

a)  $h(x) = g(x) - f(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 2 \Rightarrow$  A largura do

debuxo é de 2 m. e sua área vale  $A = \left| \int_0^2 h(x) dx \right| \Rightarrow H(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} H(0) = 0 \\ H(2) = -4 \end{cases} \Rightarrow A = 4 m^2.$

**Exercicio nº 9.-**

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x^2+1}{x} - \frac{1}{x} = x \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = \left| \int_0^5 x dx \right| = \frac{25}{2} u^2.$$

**Exercicio nº 10.-**

$$h(x) = x^3 - ax \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{a}, x = 0 \text{ y } x = \sqrt{a} \Rightarrow A = \left| \int_{-\sqrt{a}}^0 h(x) dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{a}} h(x) dx \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} H(-\sqrt{a}) = -\frac{a^2}{4} \\ H(0) = 0 \\ H(\sqrt{a}) = -\frac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} u^2.$$

**Exercicio nº 11.-**

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 &\Rightarrow f(x) = 0 \xRightarrow{\text{Ruffini}} x = -4, \quad x = -2 \quad \text{y} \quad x = 1 \Rightarrow A = \left| \int_{-4}^{-2} f(x) dx \right| + \left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right| \Rightarrow \\
 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + x^2 - 8x &\Rightarrow \begin{cases} F(-4) = \frac{16}{3} \\ F(-2) = \frac{32}{3} \\ F(1) = -\frac{61}{12} \end{cases} \Rightarrow A = \left| \frac{32}{3} - \frac{16}{3} \right| + \left| -\frac{61}{12} - \frac{32}{3} \right| = \frac{253}{12} u^2.
 \end{aligned}$$

**Exercicio nº 12.-**

$$f(x) = -0,5x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{3} < 0 \\ x_2 = 1 + \sqrt{3} > 2 \end{cases} \Rightarrow S = \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \Rightarrow F(x) = -\frac{0,5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(2) = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{8}{3} m^2.$$