

7

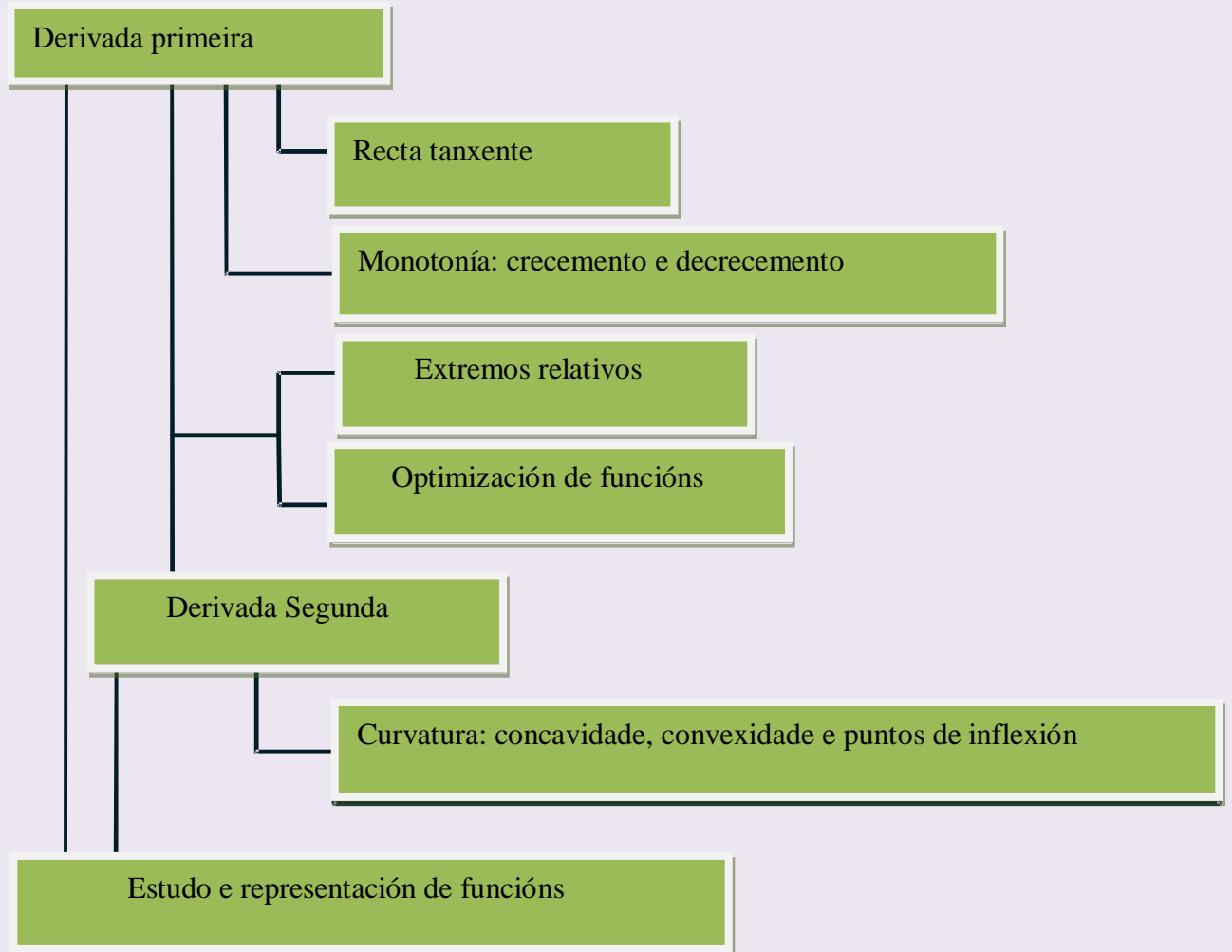
Aplicacións da derivada

Nesta Unidade veremos distintas aplicacións da derivada, quizais a ferramenta máis potente da que dispoñen as Matemáticas. Permite examinar con detalle calquera función e extraer dela toda a información que necesitamos, como descubrir a ecuación da recta tanxente á curva en calquera punto, coñecer os intervalos de crecemento e decrecemento, achar os seus extremos relativos e determinar os seus intervalos de concavidade e convexidade. Non rematan aquí os seus usos, aínda que xa quedan fóra do alcance do nivel deste curso, pero os antes mencionados permiten intuír o seu poder e a súa importancia.

Á parte das aplicacións puramente *mecánicas*, como son o estudo do crecemento (signo da derivada primeira) ou da curvatura (signo da derivada segunda), aparece outro máis *artístico*, como é o da optimización de funcións. Aquí hai que construír a función que se quere optimizar, o que pon a proba os nosos coñecementos matemáticos, pero tamén nos permite referirnos a casos concretos que poden aplicarse á vida diaria.

Como orientación para o estudo e a comprensión da Unidade, queremos facer ver que a base do tema é o estudo do signo dunha función. Isto farémolo coas mesmas ferramentas que xa vimos en 1º. Así, podemos resumir brevemente o contido da Unidade dicindo que usamos unha mesma técnica que aplicamos a diferentes funcións, ou mellor dito, ás derivadas dunha mesma función: o crecemento estúdase a partir da derivada primeira e a curvatura da derivada segunda.

1. ECUACIÓN DA RECTA TANXENTE.	3
2. MONOTONÍA: CRECIMENTO E DECRECIMENTO.	3
3. PUNTOS CRÍTICOS OU EXTREMOS RELATIVOS.	6
4. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIÓNS.	8
5. CURVATURA E PUNTOS DE INFLEXIÓN.	12



1. Ecuación da recta tanxente

Xeometricamente a derivada xorde para dar resposta ao problema do cálculo da **recta tanxente** a unha curva en calquera punto. Como a pendente da devandita recta é a derivada no punto, a ecuación é: $y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$

Exemplos

1. Acha a ecuación da recta tanxente á curva $y = 3x^2 - 5x + 6$ no punto (1,4).

Solución: Hai que descubrir $f'(1) \Rightarrow y' = 6x - 5 \Rightarrow y'(1) = 6x - 5|_{x=1} = 1 \Rightarrow$ Substituíndo na fórmula queda $y - 4 = x - 1 \Rightarrow r: y = x + 3$.

2. Acha a ecuación da recta tanxente a $y = -3x^2 + 1$ en $x = 2$.

Solución: Hai que descubrir $f(2)$ e $f'(2) \Rightarrow f(2) = -3 \cdot 2^2 + 1 = -11$; $f'(2) = -6x|_{x=2} = -12 \Rightarrow$
 $y - (-11) = -12(x - 2) \Rightarrow r: y = -12x + 13$.

3. En que punto a recta tanxente á gráfica da función $y = x^2 + 5x - 6$ é paralela á bisectriz do primeiro cuadrante? Áchese o punto de tanxencia.

Solución: Para que dúas rectas sexan paralelas han de ter a mesma pendente. A bisectriz do primeiro cuadrante é a recta $y = x \Rightarrow m = 1$ e a pendente da recta tanxente é $f'(x_0) = 2x_0 + 5 = 1 \Rightarrow x_0 = -2$. Como $y_0 = y(-2) = -12$ e $f'(-2) = 1$, a tanxente é

$$y - (-12) = x - (-2) \Rightarrow r: y = x - 10 \text{ e o punto de tanxencia } (-2, -12).$$

4. Acha a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = xe^{x^2}$ no punto de abscisa $x = 1$.

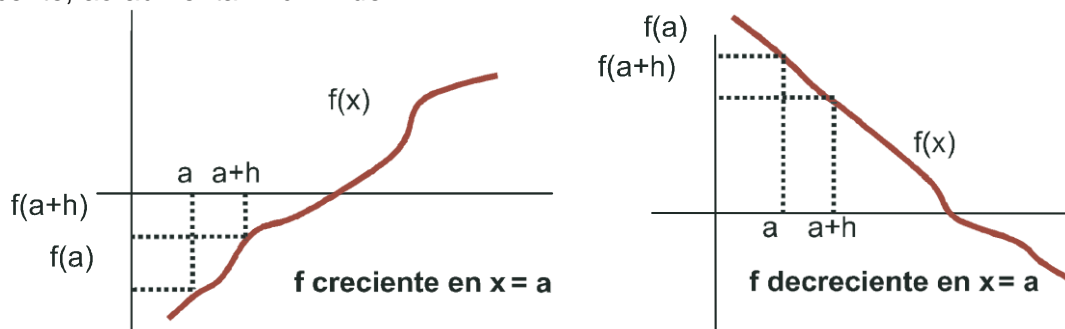
Solución: $f(1) = e$; $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 \cdot e^{x^2} = (1 + 2x^2) \cdot e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3e \Rightarrow$ A recta tanxente ten por ecuación $y - e = 3e(x - 1) \Rightarrow r: y = 3ex - 2e$.

2. Monotonía: crecemento e decrecemento

Co termo **monotonía** facemos referencia ao crecemento ou decrecemento das funcións. Dise que unha función é monótona crecente ou simplemente **crecente** en $x = a$ cando $f(a+h) \geq f(a)$ e $f(a-h) \leq f(a)$, se $h > 0$.

Se non aparece a igualdade diremos que a función é estritamente crecente, aínda que habitualmente usamos o termo crecente no sentido de estritamente crecente. A definición para o caso de que a función sexa **decrecente** en $x = a$ non debe formular problemas. Será estritamente decrecente cando $f(a+h) < f(a)$ e $f(a-h) > f(a)$, se $h > 0$.

Observa que o que escribimos é que, se f é crecente, ao aumentar x debe aumentar f e que se é decrecente, ao aumentar x diminúe f .



A pesar do intuitivo das definicións anteriores, non son excesivamente útiles para os cálculos. Teriamos que ir punto a punto, algo imposible de levar á práctica. Non obstante, se nos fixamos nas definicións, observamos que aparecen uns termos, vellos coñecidos da derivada: $f(a+h)$, $f(a)$, h . Indo á definición de derivada nun punto teriamos o seguinte (supoñendo $h > 0$):

$$\text{Se } f \text{ é crecente en } x = a \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

$$\text{Se } f'(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a) \Rightarrow f \text{ é crecente en } x = a.$$

Polo tanto, podemos cambiar as nosas definicións por outras alternativas que digan: f é crecente en $x=a$ se $f'(a) > 0$ e decrecente se $f'(a) < 0$. Deste modo, estudar o crecemento dunha función non é máis que estudar o signo da súa derivada, pois a función será crecente naqueles intervalos nos que a súa derivada sexa positiva e decrecente naqueles nos que a súa derivada sexa negativa.

¿Que sucede se $f'(a) = 0$? Nestes puntos, a recta tanxente será unha recta horizontal, paralela ao eixe OX . A función cambia o seu comportamento, pasando de crecer a decrecer ou á inversa, presentando ou un máximo ou un mínimo relativo, respectivamente. Estes, como xa sabías, son os chamados puntos críticos ou extremos relativos, que detallaremos máis adiante.

Exemplos

5. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$

Solución:

Calculamos a súa derivada e igualámola a cero: $f'(x) = 4x - x^2 = (4-x)x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x=4$ e $x=0$. Construímos a seguinte táboa para estudar o signo de f' e, simultaneamente, indicar o comportamento da función:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$\text{Sign}(x(x-4))$	-	+	-
f	D↓	C↑	D↓

6. Dada a curva $y = \frac{x}{x^2-1}$ acha os seus intervalos de crecemento e decrecemento.

Solución:

Ao ser unha fracción alxébrica, calculamos a súa derivada e igualamos a cero o seu numerador e o seu denominador independentemente:

$$y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{Num} > 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{\pm 1\} \end{cases} \Rightarrow y' < 0$$

en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ y é decrecente en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, é dicir, y é decrecente en todo o seu dominio.

7. Unha enfermidade propágase de tal forma que, despois de t semanas afecta a $N(t)$ centos de persoas, onde $N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t - 6) & \text{se } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4}(t - 10) & \text{se } 6 < t \leq 10 \end{cases}$. Estuda o crecemento e decrecemento de $N(t)$.

Solución: Ao tratarse dunha función definida a anacos a súa derivada tamén o será e haberá que estudar a monotonía por separado en cada un dos anacos. Previamente hai que descubrir se é derivable en $t=6$, que é o único posible punto de discontinuidade:

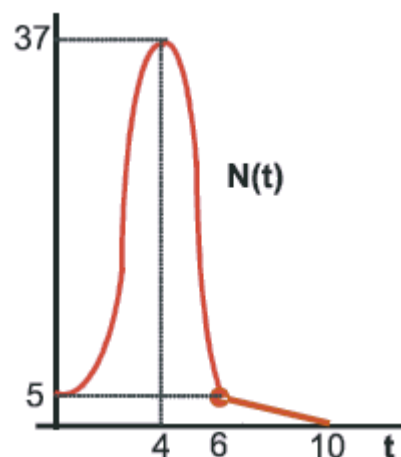
$N(6) = 5$; $\lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} [5 - t^2(t - 6)] = 5$; $\lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} \left[-\frac{5}{4}(t - 10)\right] = 5$
 $\Rightarrow N$ es continua.

$N'(6^-) = -3t^2 + 12t \big|_{t=6} = -36$; $N'(6^+) = -5/4 \big|_{t=6} = -5/4 \Rightarrow \nexists N'(6)$.

A derivada é: $N'(t) = \begin{cases} -3t^2 + 12t & \text{se } 0 \leq t < 6 \\ -\frac{5}{4} & \text{se } 6 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow N'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} -3t(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 0, 4 \\ -\frac{5}{4} < 0 \end{cases}$

A táboa que hai que construír e a gráfica (non a escala) son as seguintes:

	$(0, 4)$	$(4, 6)$	$(6, 10)$
$\text{sgn } N'(t)$	+	-	-
N	$C \uparrow$	$D \downarrow$	$D \downarrow$



8. Acha os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{se } x < 3 \\ -\frac{10}{x} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

Solución: Ao ser unha función definida a anacos a súa derivada tamén o é, polo que hai que estudar o crecemento en cada un dos anacos separadamente. Previamente hai que descubrir se é derivable en $x=3$, que é o único punto problemático (observa que $x=0$, que afecta a $-10/x$ non entra no seu intervalo de definición):

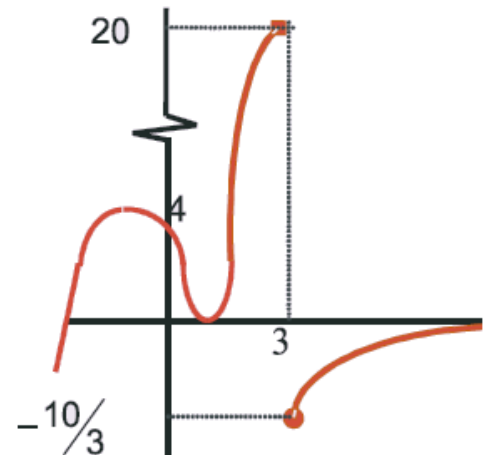
$$f(3) = -10/3; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 3x + 2) = 20; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-10/x) = -10/3 \Rightarrow \text{Non é continua polo que tampouco é derivable en } x=0.$$

$$\text{A derivada queda: } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{se } x < 3 \\ \frac{10}{x^2} & \text{se } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{10}{x^2} > 0 \Rightarrow f \text{ crecente en } (3, \infty) \end{cases}$$

A táboa que hai que construír é:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$\text{sgn } f'(x)$	+	-	+	+
f	$C \uparrow$	$D \downarrow$	$C \uparrow$	$C \uparrow$



A súa representación é a que aparece á dereita.

9. Acha os intervalos de crecemento e decrecemento a función $f(x) = xe^{-2x}$.

Solución:

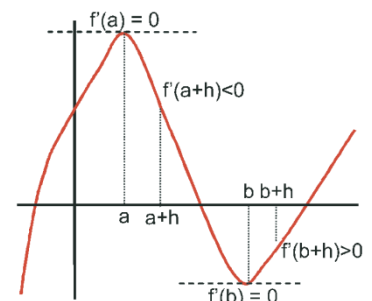
$$f'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x} \cdot (-2) \Rightarrow f'(x) = (1-2x)e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$\text{sgn } f'(x)$	+	-
f	$C \uparrow$	$D \downarrow$

3. Puntos críticos ou extremos relativos

Intuitivamente sospeitamos que os extremos dunha función son o menor e o maior valor que pode tomar unha función. Estes valores reciben o nome de extremos absolutos, e non adoitan ser buscados. Existen outros extremos en Matemáticas, tamén coñecidos como **puntos críticos** ou **extremos relativos**, de maior importancia que os anteriores. Estes puntos caracterízanse porque neles a recta tanxente á curva é horizontal, é dicir, paralela ao eixe OX, polo que a derivada se anula nos devanditos puntos. Ao anularse, e se a derivada é continua, a función será crecente á esquerda e decrecente á dereita (se é un máximo relativo), e decrecente á esquerda e crecente á dereita (se é un mínimo relativo). Este é un método útil para descubrir os extremos relativos cando se dispón da táboa de crecemento.

Outro procedemento esixe que vaíamos á derivada segunda. Observando a gráfica, e tendo en conta a definición de derivada segunda, teríamos:



$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h)}{h} < 0$$

$$f''(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(b+h) - f'(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(b+h)}{h} > 0$$

Concluimos que f ten un punto crítico en x_0 cando $f'(x_0) = 0$. É un **máximo relativo** se $f''(x_0) < 0$ e un **mínimo relativo** se $f''(x_0) > 0$.

Exemplos

10. Calcula os máximos e mínimos relativos da función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Solución: Construiremos a táboa de crecemento, método máis sinxelo neste caso:

$$f' = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2} = 0 \Rightarrow 3-2x=0 \Rightarrow x=3/2 \text{ punto crítico.}$$

	$(-\infty, 3/2) - \{1\}$	$(3/2, \infty) - \{2\}$
$\text{sgn } f'(x)$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$
f	$C \uparrow$	$D \downarrow$

A función ten un máximo en $(3/2, f(3/2)) = (3/2, -4)$

11. O valor, en miles de millóns, dunha empresa en función do tempo t , vén dado por

$$f(t) = 9 - (t - 2)^2, 0 \leq t \leq 4,5.$$

Deduce en que valor de t a empresa alcanzou o seu máximo valor e en que valor de t tivo o seu valor mínimo.

Solución: Derivamos e igualamos a derivada primeira a cero: $f'(t) = -2(t-2) \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$
 $f''(t) = -2 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow f$ ten un máximo para $t = 2$ e vale $f_{\max} = 9$. Non aparece mínimo relativo, así que o mínimo atópase nalgún dos extremos do intervalo no que está definida a función: $f(0) = 5$; $f(4,5) = 2,75$.

A función alcanza o devandito valor mínimo para $t = 4,5$ e vale $f_{\min} = 2,75$.

12. Unha empresa estimou que os ingresos e os gastos anuais (en euros) que xeran a fabricación e venda de x unidades dun determinado produto, veñen dados polas seguintes funcións: Ingresos: $I(x) = 28x^2 + 36000x$; Gastos: $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$.

Determina, xustificando as respostas:

- a) A función que define o beneficio anual.
- b) O número de unidades que hai que vender para que o beneficio sexa máximo.
- c) O valor do devandito beneficio máximo.

Solución:

a) Evidentemente, $\text{Beneficio} = \text{Ingresos} - \text{Gastos}$, co que se obtén:

$$B(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$$

b) Acharmos o máximo relativo de $B(x)$: $B'(x) = -32x + 24000 \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow x = 750 \Rightarrow B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) = -32 < 0 \Rightarrow$ hai que vender **750 unidades** para que o beneficio sexa máximo.

c) $B_{\max} = B(750) = -16 \cdot 750^2 + 2400 \cdot 750 - 700000 = 8300000€$

13. Considérase a función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$

Calcula os seus máximos e os seus mínimos relativos, se os ten.

Solución:

$$f(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -18x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ punto crítico}$$

$f''(x) = \frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3} \Rightarrow f''(0) = 162/(-9)^3 = -2/9 < 0 \Rightarrow$ máximo para $x = 0, f(0) = 0$. A función só presenta un máximo na orixe de coordenadas **O(0,0)**.

4. Sábese que a función $f(x) = x^2 + ax + b$ ten un mínimo en $x=2$ e que a súa gráfica pasa polo punto (2,2). Canto vale a función en $x = -1$?

Solución: Primeiro descubrimos o valor dos coeficientes a e b a partir das condicións que se dan e despois o valor pedido:

Mínimo en $x = 2, f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(2) = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$. A gráfica pasa por (2,2) \Rightarrow

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + b = 2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6. \text{ Polo tanto, } f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 11.$$

15. Sexa a función $f(x) = 2x^2 - 1/3 x^3$. Calculense:

a) As coordenadas dos seus máximos e mínimos relativos.

b) O valor de x para o que é máxima a pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) $f'(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 4 \rightarrow f''(x) = 4 - 2x \Rightarrow f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ mínimo en $(0, f(0)) = (0, 0)$. $f''(4) = -4 < 0 \Rightarrow$ máximo en $(4, f(4)) = (4, 32/3)$

b) A pendente de f en calquera punto x vén dada pola función $y = 4x - x^2$. Agora temos que achar os extremos relativos desta nova función:

$$y' = 4 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 2; y'' = -2 \Rightarrow y''(2) = -2 < 0 \Rightarrow \text{a pendente é máxima para } x = 2 \text{ e vale } 4.$$

4. Optimización de funcións

Optimizar unha función consiste en buscar os seus extremos relativos. Lóxicamente trátase de facer exactamente o mesmo que no apartado anterior. ¿Por que o separamos entón? A razón é que cando falamos de calcular os máximos e mínimos damos por feito que nos dan a función que debemos optimizar, mentres que se dicimos optimizar sobreentendemos que temos que construír a función que se vai optimizar, que é o paso realmente complicado, e diferente ao do anterior apartado.

O tipo de problemas ao que se lle pode aplicar a técnica de **optimización de funcións** é extensísimo, polo que non se poden dar unhas pautas fixas, senón unhas orientacións que axuden a resolvelo. Habitualmente terémonos que apoiar en coñecementos aritméticos, alxébricos ou xeométricos previos e unha lectura detallada, que nos permita descubrir cal será e que forma terá a función que imos optimizar.

Exemplos

16. Acha as dimensións do rectángulo que tendo 28 m. de perímetro teña área máxima.

Solución:

Podemos facer un pequeno gráfico, onde escribimos as variables que imos usar. A partir das devanditas variables podemos seguir a seguinte estratexia: escribimos primeiro a **función que temos que optimizar**, que neste caso é a área e que constará de dúas variables: $A(x, y) = x \cdot y$.

Como só sabemos manexar funcións dunha variable, temos que atopar unha **relación entre as variables**.

Neste caso, esa relación proporciónaa o perímetro: $2x + 2y = 28 \Rightarrow x + y = 14$.

Agora despexamos unha das variables en función da outra na nosa relación; substituímos na función que hai que optimizar e queda unha función cunha única variable, á que aplicamos o método habitual para o cálculo dos extremos relativos:

$$y = 14 - x \Rightarrow A(x) = x \cdot (14 - x) = 14x - x^2.$$

Antes de derivar podemos deternos un momento na función: trátase dunha función cuadrática (parábola) cuxo vértice é un máximo (pois o coeficiente de x^2 é negativo), que é o que buscamos. A función está ben construída.

$A'(x) = 14 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 7$; $A''(x) = -2 \Rightarrow A''(7) = -2 < 0 \Rightarrow A(x, y)$ é máxima para $x = 7$ cm, $y = 14 - 7 = 7$ cm. Polo tanto, o rectángulo de área máxima e perímetro 28 cm é un cadrado de lado 7 cm e área 49 cm².

Convén finalizar dando o valor non só das variables que optimizan a función, senón tamén o valor optimizado da devandita función, e unha superficial explicación do resultado obtido.

17. Descompón o número 81 en dous sumandos positivos de forma que o produto do primeiro sumando polo segundo sexa máximo.

Solución: Trátase dun problema aritmético. Chamamos x a un dos sumandos e y ao outro. Seguindo os pasos do exemplo 1 escribimos:

Función que se debe optimizar: $P(x, y) = x \cdot y$

Relación entre as variables: $x + y = 81$.

Despexamos y : $y = 81 - x$. Substituímos en $P(x, y)$ obtendo $P(x) = x \cdot (81 - x) = 81x - x^2 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow x = 81/2 \Rightarrow P''(x) = -2 \Rightarrow P''(81/2) = -2 < 0 \Rightarrow$ máximo para $x = 81/2$, $y = 81/2$.

O produto é máximo ($P_{\max} = 81^2/2^2 = 6561/4$) cando os sumandos son iguais e iguais á metade do número que se descompón.

Dáte conta de que este problema aritmético é igual que o exemplo 1, a súa variante xeométrica, e que, obviamente, a súa solución é a mesma.

18. Dispónse dunha barra de ferro de 10 metros para construír unha portería, de maneira que a portería teña a máxima superficie interior posible.

a) Que lonxitude deben ter os postes e o longueiro?

b) Que superficie máxima interior ten a portería?

Solución: Trátase de construír tres lados dun rectángulo (o cuarto será o chan onde se apoia a portería) de modo que a súa superficie sexa máxima. Chamando x á base e y á altura queda:



Función que se debe optimizar: $A(x, y) = x \cdot y$

Relación entre as variables: $x + 2y = 10$

Por comodidade despexamos x obtendo: $x = 10 - 2y \Rightarrow$ A función que hai que optimizar é $A(y) = (10 - 2y) \cdot y = 10y - 2y^2$ (parábola con máximo) $A'(y) = 10 - 4y \Rightarrow A'(y) = 0 \Rightarrow y = 5/2 \Rightarrow A''(y) = -4 \Rightarrow A''(5/2) = -4 < 0 \Rightarrow$

a) máximo para $y = 5/2 = 2,5$ m. $x = 5$ m.

b) $A_{\max} = 25/2 = 12,5$ m.

Observa que manexamos a variable y como a x , porque agora ambas as dúas son variables independentes, sendo as dependentes a área e a lonxitude da barra.

19. A suma de tres números positivos é 60. O primeiro máis o dobre do segundo máis o triplo do terceiro suman 120. Acha os números que verifican estas condicións e cuxo produto é máximo.

Solución: Neste exercicio verás a diferenza entre a optimización de funcións e a programación lineal. Recorda que ambas as dúas perseguen o mesmo obxectivo, pero ambas as dúas aplícanse a diferentes situacións: a programación lineal só pode usarse con funcións lineais, é dicir, con funcións nas que as variables teñen como expoñente 1 (polinomios de 1º grao) e non hai produto das devanditas variables, mentres que a optimización é aplicable a todo tipo de funcións.

Chamando aos números x, y, z , respectivamente, podemos escribir:

Función que se vai optimizar: $P(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

Relacións entre as variables: $x + y + z = 60$

$$x + 2y + 3z = 120$$

Fíxate que ao ter 3 variables han de aparecer 2 relacións para poder despexar dúas das variables (y, z) en función da outra (x). Formulamos un sistema de 2 ecuacións con 2 incógnitas que resolvemos por redución:

$$\begin{cases} y + z = 60 - x \\ 2y + 3z = 120 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y - 2z = -120 + 2x \\ 2y + 3z = 120 - x \end{cases} \Rightarrow z = x; y = 60 - 2x. \text{ A función queda:}$$

$$P(x) = x \cdot (60 - 2x) \cdot x = 60x^2 - 2x^3 \Rightarrow P'(x) = 120x - 6x^2 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow 6x(20 - x) = 0 \Rightarrow$$

$x = 0$ (absurda) e $x = 20$. $P''(x) = 120 - 12x \Rightarrow P''(0) = 120 > 0 \Rightarrow$ mínimo;

$P''(20) = -120 < 0 \Rightarrow$ máximo. O produto é máximo para $x = 20, y = 60 - 40 = 20,$

$z = 20$, valendo $P_{\max} = 8000$.

Observa que aparece unha solución que podemos cualificar directamente de absurda, pois se un número valese cero, o produto sería cero. Non obstante, convén reforzar a nosa opinión co cálculo posterior, que debe corroborar a nosa afirmación, pois no caso contrario deberíamos pensar que nos confundimos. Se ao repasar os cálculos vemos que non hai confusión, haberá que concluír que o problema formulado non ten solución, aínda que non é este o presente caso.

20. Deséxase construír caixas de embalaxe en forma de prisma cuadrangular de modo que a suma das tres dimensións sexa 72. Cales han ser as dimensións para que a capacidade das caixas sexa máxima?

Solución: Parece que volvemos ter un problema con 3 variables, posto que un prisma ten volume (esa é a súa capacidade). Non obstante, ao ser cuadrangular (a súa base é un cadrado), redúcese a 2 variables. Recordando como é un prisma e como se calcula o seu volume podemos escribir:

Función que hai que optimizar: $V(x, y) = A_{\text{base}} \cdot h = x^2 y$

Relación entre as variables: $2x + y = 72$

Despexamos y e (se é x hai que desenvolver innecesariamente un binomio ao cadrado):

$$y = 72 - 2x \Rightarrow V(x) = x^2(72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3 = V'(x) = 144x - 6x^2 \Rightarrow \\ V'(x) = 0 \Rightarrow 6x(24 - x) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ (*absurda*), $x = 24 \rightarrow V'(x) = 144 - 12x \Rightarrow V''(0) = 144 < 0 \Rightarrow$ mínimo; $V''(24) = -144$ (*máximo*) \Rightarrow A caixa terá capacidade máxima para $x = 24$ u.; $y = 72 - 2 \cdot 24 = 24$ u., valendo $V_{\max} = 13824 \text{ u}^3$.

Escribimos u como unidade de lonxitude e u^3 como a de volume ao non se especificar ningunha unidade de medida.

Observa a regularidade: se queremos rectángulos de área máxima aparecen cadrados, e se queremos prismas cuadrangulares de volume máximo aparecen hexaedros regulares (cubos).

21. A función de custo total de produción de x unidades dun determinado produto é

$$C(x) = x^3/100 + 8x + 20.$$

Defínese a función de custo medio por unidade como $Q(x) = C(x)/x$. ¿Cantas unidades x_0 é necesario producir para que sexa mínimo o custo medio por unidade? ¿Que relación existe entre $Q(x_0)$ e $C'(x_0)$?

Solución: Trátase de optimizar unha función da que xa coñecemos a súa expresión. Podiamos incluír o exercicio no apartado 3, pero, como hai que efectuar unha pequena manipulación para descubrir a forma da función que se debe optimizar, que non é $C(x)$ senón $Q(x)$, preferimos deixalo para este apartado:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2}{100} + 8 + \frac{20}{x} \Rightarrow Q'(x) = \frac{x}{50} - \frac{20}{x^2} \Rightarrow Q'(x) = 0 \Rightarrow x/50 = 20/x^2 = x^3 \\ = 1000$$

$$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow Q''(x) = 1/50 + 40/x^3 \Rightarrow Q''(10) = 3/50 > 0$$

a) O custo medio por unidade é mínimo para $x_0 = 10$ unidades, $Q_{\min} = 11$.

b) Non nos preguntan por unha relación numérica, senón funcional. Observa que se despexamos $C(x)$ teremos:

$$C(x) = x \cdot Q(x) = C'(x) = Q(x) + x \cdot Q'(x) \Rightarrow C'(x_0) = Q(x_0) + x_0 \cdot Q'(x_0) = Q(x_0), \text{ pois } Q'(x_0) \\ = 0 \text{ por ter un mínimo en } x_0. \text{ Polo tanto, ambos os dous valores son iguais.}$$

22. Unha compañía de autobuses interurbanos comprobou que o número de viaxeiros diarios (N) depende do prezo do billete (p) segundo a expresión $N(p) = 300 - 6p$.

a) Dá a expresión que nos proporciona os ingresos diarios (I) desa compañía en función do prezo do billete.

b) Que ingreso diario se obtén se o prezo do billete é 15 euros?

c) Cal é o prezo do billete que fai máximos os ingresos diarios?

d) Cales son os ingresos máximos?

Solución: Os ingresos virán dados polo produto do número de viaxeiros e o importe do billete que han de aboar (todo iso diario). Tendo en conta o nome que se dá a cada unha das variables queda:

a) $I(p) = N(p) \cdot p = 300p - 6p^2$;

b) $I(15) = 300 \cdot 15 - 6 \cdot 15^2 = 3150€$

c) $I'(p) = 300 - 12p \Rightarrow I'(p) = 0 \Rightarrow p = 25 \Rightarrow I'(p) = -12 \Rightarrow I''(25) = -12 < 0 \Rightarrow$
máximo para $p = 25€$ co que:

d) $I_{\max} = 300 \cdot 25 - 6 \cdot 25^2 = 3750 €$

23. Unha empresa fabrica latas de latón sen tapa de volume 500 cm^3 , para almacenar un líquido colorante. As caixas teñen a base cadrada. Áchense a altura e o lado da base de cada caixa para que a cantidade de latón empregada en fabricalas sexa a mínima posible.

Solución: A figura é a mesma que no exemplo 5, polo que imos usar as mesmas variables. Agora vemos que a relación a proporciona o volume (que é fixo) e a función a optimizar é o gasto en latón. En que consiste o gasto en latón? Se despezamos a caixa vemos que necesitamos 4 rectángulos de base x e altura y , e 1 cadrado de lado x para a súa construción. Polo tanto, o gasto en latón proporciónanolo a superficie total da caixa (Superficie da base + Superficie lateral):

Función que se vai optimizar: $S(x, y) = 4xy + x^2$

Relación entre as variables: $x^2y = 500 \text{ cm}^3$

Despezamos e: $y = 500/x^2$. Sostituímo e temos

$S(x) = 4x \cdot 500/x^2 + x^2 = 2000/x + x^2 \Rightarrow S'(x) = -2000/x^2 + 2x \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2000/x^2 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow$

$x = 10 \Rightarrow S''(x) = 4000/x^3 + 2 \Rightarrow S''(10) = 6 > 0 \Rightarrow$

O gasto de latón é mínimo para $x = 10 \text{ cm}$. e $y = 500/100 = 5 \text{ cm}$, é dicir, a caixa ha de ter o lado da base dobre que a altura. O gasto mínimo será $S_{\min} = 300 \text{ cm}^2$.

Dáte conta de que os resultados cambiarían se a caixa tivese tapa que, para que encaixe, ha de ter igual superficie que a base. Intenta repetir este exercicio neste caso e verás que a caixa ten que ser un cubo de aresta $\sqrt[3]{500}$.

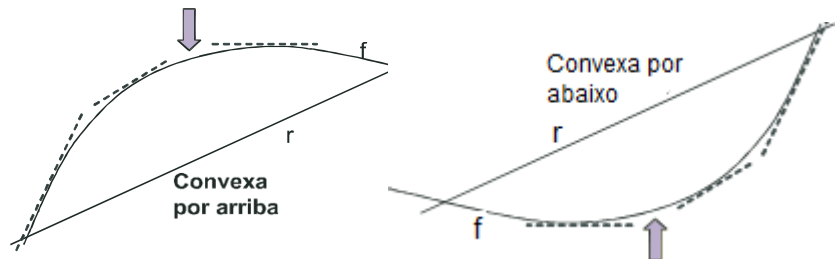
Non estaría de máis que o lector refrescase os seus coñecementos xeométricos adquiridos en cursos anteriores, pois seranlle de axuda para a resolución deste tipo de problemas.

5. Curvatura e puntos de inflexión

Unha función presenta dúas **curvaturas** diferentes, definidas a partir dunha recta secante: se a

función vai por enriba da recta, dicimos que é convexa por arriba, convexa ou que ten a forma \cap . Se vai

por debaixo da recta podemos dicir que é convexa por abaixo, cóncava ou que ten a forma \cup . Tanto nome débese a que podemos mirar a función dende dúas posicións diferentes (arriba e abaixo) e a que os comportamentos son complementarios (o que dende unha posición é convexo, pola outra será cóncavo e viceversa). Para evitar meternos en discusións, cualificamos un ou outro comportamento coa súa representación gráfica \cap ou \cup .



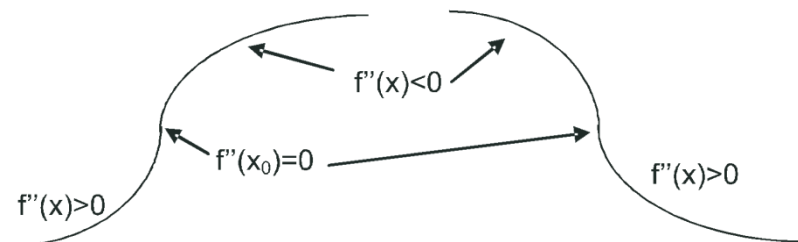
Como acontece co crecemento, a definición non é demasiado práctica para os cálculos e temos que intentar atopar algún outro procedemento máis cómodo. Observa que cando a función é convexa por arriba, a súa derivada decrece (liñas punteadas da gráfica), polo que a súa derivada segunda será negativa; cando a función é convexa por abaixo, a derivada crece (liñas punteadas da gráfica), polo que a derivada segunda será positiva (observa que coincide co obtido para os extremos relativos). Polo tanto, estudar a curvatura dunha función consiste en estudar o signo da súa derivada segunda:

f é \cap naqueles intervalos nos que $f'(x) < 0$.

f é \cup naqueles intervalos nos que $f'(x) > 0$.

f ten un punto de inflexión naqueles puntos nos que $f''(x) = 0$.

Un **punto de inflexión** é aquel no que a función cambia a súa curvatura de forma continua:



Exemplos

24. Estuda a curvatura da función $y = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

Solución: Temos que calcular a derivada segunda, igualala a cero e estudar o seu signo.

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60; f''(x) = 12x - 42 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 42/12 = 7/2.$$

A función ten un punto de inflexión en $(7/2, f(7/2))$

Pto. Inflexión $(7/2, 13/2)$

	$(-\infty, 7/2)$	$(7/2, \infty)$
$\text{sgn}(12x - 42)$	-	+
f	\cap	\cup

25. Calcula os intervalos de concavidade e convexidade da función $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x + 2}$

Solución:
$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 2}{(x + 2)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(6x + 12)(x + 2) - 2 \cdot (3x^2 + 12x - 2)}{(x + 2)^3} = \frac{28}{(x + 2)^3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Num} > 0 \\ \text{Den} = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

A función cambia de curvatura en $x = -2$, pero non ten punto de inflexión pois non o fai con continuidade $f'(x) \neq 0$ e non existe $f(-2)$, senón na asíntota vertical da función.

Este comportamento adoitan telo as fraccións

alxébricas. Para obtelo hai que simplificar na derivada segunda, sacando factor común

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$\text{Sgn}\left(\frac{28}{(x+2)^3}\right)$	-	+
f	\cap	\cup

no numerador antes de operar. No caso contrario o denominador sería un binomio á cuarta, sempre positivo, e o numerador anularíase, aparecendo un falso punto de inflexión. Podemos darnos conta do erro porque a abscisa deste falso punto de inflexión coincide coa da asíntota vertical, co que a derivada segunda nese punto sería unha indeterminación sería $0/0$ que se converte en ∞ ou $-\infty$ ao ser resolta.

26. Determina os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x) = x + 1/x$, $x \neq 0$.

Solución:

$$f'(x) = 1 - 1/x^2; f''(x) = 2/x^3 \Rightarrow$$

$NUM > 0 \Rightarrow$ non ten puntos de inflexión

$DEAN = 0 \Rightarrow x = 0$ (triplo)

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } 2/x^3$	-	+
f	\cap	\cup

A función cambia a súa curvatura na súa asíntota vertical, polo que non ten punto de inflexión.

27. Estuda a curvatura da función $f(x) = e^x(x^2 + x - 11)$.

Solución:

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 3x - 10); f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 5x - 7) \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 6,14; x_2 = 1,14$$

A función ten dous puntos de inflexión:

$(x_1, f(x_1)) = (6,14, 0,044)$ e $(x_2, f(x_2)) = (1,14, -26,76)$.

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$\text{sgn } [e^x(x^2 + 5x - 7)]$	+	-	+
f	\cup	\cap	\cup

28. Acha os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4$

Solución:

$$f'(x) = x^3 + 4x^2 - x; f''(x) = 3x^2 + 8x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,78; x_2 = 0,12$$

A función ten dous puntos de inflexión:

$(x_1, f(x_1)) = (-2,78, -21,65)$; $(x_2, f(x_2)) = (0,12, -4)$

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$\text{sgn } (3x^2 + 8x - 1)$	+	-	+
f	\cup	\cap	\cup

29. Estuda a curvatura de $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Solución:

	$(-\infty, 2) - \{0\}$	$(2, \infty)$
$\text{sgn}\left(\frac{12-6x}{x^4}\right)$	+	-
f	∪	∩

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x - 4}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{12 - 6x}{x^4}$$

A función ten un punto de inflexión en $(2, f(2)) = (2, 0)$.

Neste caso, a asíntota vertical $x=0$ non cambia a curvatura.

30. Determina os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x) = xe^{2x}$.

Solución:

$$f'(x) = (1+2x)e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 4(1+x)e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

A función ten un punto de inflexión en $(-1, f(-1)) = (-1, -1/e^2)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\text{sgn}[4(1+x)e^{2x}]$	-	+
f	∩	∪