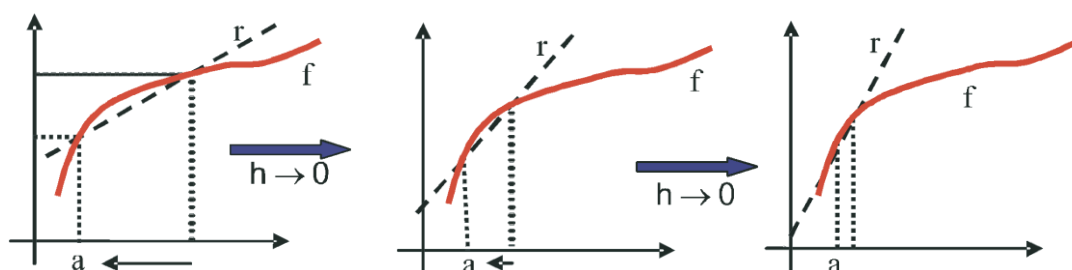


Unidade 6. Derivadas. Técnicas de derivación

1. Derivada dunha función. Función derivada

Vimos en 1º que a derivada dunha función nun punto non era máis que a taxa de variación instantánea no devandito punto $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

A interpretación xeométrica desta definición de derivada condúciáanos a relacionala coa pendente da recta tanxente á curva, resultando ser $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a ecuación da devandita recta tanxente á función f no punto (x_0, y_0) .



A interpretación física da derivada condúcenos ao concepto de velocidade instantánea, definida como $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ relacionada coa notación $\frac{dy}{dx}$ na que se expresa a variación na función y (diferencial de y ou dy) inducida pola variación na variable x (diferencial de x ou dx).

Para calcular unha derivada seguindo a definición recorriamos á *Regra dos 4 pasos*, consistente en desagregar a definición e efectuar os cálculos pouco a pouco:

1º paso: cálculo das imaxes $f(a+h)$ e $f(a)$

2º paso: cálculo da diferenza. Se se pode, sácase factor común h .

3º paso: cálculo do cociente $f(a+h) - f(a)$. Se se pode, simplifícase h .

4º paso: cálculo do límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, que xa é a derivada.

Recordemos o procedemento cun exemplo: Dada $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$ calcula $f'(-1)$ usando a definición.

Primeiro escribimos a definición para este caso:

$$1^{\text{er}} \text{ paso: } f(-1+h) = \frac{2(-1+h)-1}{3(-1+h)+4} = \frac{2h-3}{3h+1}, \quad f(-1) = \frac{2(-1)-1}{3(-1)+4} = -3.$$

$$2^{\text{o}} \text{ paso: } f(-1+h) - f(-1) = \frac{2h-3}{3h+1} - (-3) = \frac{2h-3+9h+3}{3h+1} = \frac{11h}{3h+1}.$$

$$3^{\text{er}} \text{ paso: } \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{11h}{3h+1}}{h} = \frac{11}{3h+1}.$$

$$4^{\text{o}} \text{ paso: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{11}{3h+1} = 11 \Rightarrow f'(-1) = 11.$$

Na Unidade 8 do libro de 1º atoparás máis exemplos do uso da Regra dos catro pasos, e xa postos, na devandita unidade repasa o concepto de T. V.M., así como as definicións de derivada dunha función nun punto e función derivada no caso de que non te aclares bastante coas que damos nesta unidade.

Non está demais que lembres o concepto de tanxente dun ángulo, e que a pendente dunha recta é a tanxente do ángulo formado pola recta e o semieixe OX a dereita do punto de corte do devandito eixe e a recta

Dado o tedioso do cálculo da derivada punto a punto, recórrase a definir unha **función derivada** que nos permite calcular a derivada de calquera función en calquera punto. Para iso definiamos a derivada dunha función un punto xenérico x como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
 a partir desta definición obteñense as derivadas das funcións elementais e a álgebra de derivadas.

2. Derivada de funcións coñecidas

Como dixemos ao introducir a derivada en 1º, hai que intentar entender a definición, sabela manexar para funcións sinxelas, e, para usar a derivada, debemos aprender as derivadas das funcións matemáticas máis habituais, así como as regras que nos permitan derivar funcións máis complexas, obtidas como certa combinación das elementais.

A esta tarefa dedícase este apartado onde se expón a información necesaria en forma de táboas. Na primeira táboa aparecen as derivadas das funcións usuais e das trigonométricas, que non adoitan ser moi usadas nas ciencias sociais, aínda que xa son coñecidas de 1º. Na segunda, están as regras (**álgebra de derivadas**) que nos permiten derivar sumas, restas, produtos, cocientes e composicións de funcións. Dada a importancia e a maior dificultade que presenta a regra da cadea (derivada da composición de funcións), desenvolvémola para os casos máis habituais. Estas táboas non son para miralas continuamente, senón para mecanizalas, tal e como o alumno xa fixo con outras táboas máis elementais.

Táboa de derivadas das funcións usuais	
Función	Derivada
k (constante)	0
x^n , $n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Álgebra de derivadas

$$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x), k \text{ constante}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{k}{f}\right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

A última fórmula, coñecida como regra da cadea, pode analizarse un pouco para algunhas funcións, obtendo a seguinte táboa:

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), \quad n \in \mathbb{R}$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\text{sen}(f(x))$	$f'(x) \cdot \cos f(x)$
$\cos(f(x))$	$-f'(x) \cdot \text{sen}(f(x))$
$\text{tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x)(1 + \text{tg}^2(f(x)))$

Exemplos

13. Averigua la derivada de **a)** $y = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 3$; **b)** $y = x^3 e^x$; **c)** $y = \frac{\ln x}{x}$.

Solución:

$$\text{a) } y' = 7 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 5 = 21x^2 - 12x + 5;$$

$$\text{b) } y' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3+x)x^2 e^x;$$

$$\text{c) } y' = \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

14. Deriva: **a)** $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$; **b)** $y = \sqrt[7]{(2x - 5x^3)^4}$; **c)** $f(x) = \frac{1 + \text{sen} x}{1 - \text{sen} x}$.

Solución:

$$\text{a) } y' = 8(3x^5 - 5x^2 + 7)^7 (15x^4 - 10x) = 8(15x^4 - 10x)(3x^5 - 5x^2 + 7)^7;$$

$$\text{b) } y = (2x - 5x^3)^{\frac{4}{7}} \Rightarrow y' = \frac{4}{7}(2x - 5x^3)^{-\frac{3}{7}} (2 - 15x^2) = \frac{4(2 - 15x^2)}{7(2x - 5x^3)^{\frac{3}{7}}} = \frac{4(2 - 15x^2)}{7\sqrt[7]{(2x - 5x^3)^3}};$$

$$\text{c) } y' = \frac{(1 + \text{sen} x)'(1 - \text{sen} x) - (1 + \text{sen} x)(1 - \text{sen} x)'}{(1 - \text{sen} x)^2} = \frac{\cos x(1 - \text{sen} x) + \cos x(1 + \text{sen} x)}{(1 - \text{sen} x)^2} \Rightarrow y' = \frac{2 \cos x}{(1 - \text{sen} x)^2}.$$

15. Deriva: a) $f(x) = (3x^2 - 7)^2$; b) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 5}$; c) $y = \frac{e^{-x^2}}{x^2}$.

Solución:

$$\text{a) } f'(x) = 2(3x^2 - 7) \cdot 6x = 12x(3x^2 - 7) ;$$

$$\text{b) } y' = \frac{(2x - 3)(x + 5) - (x^2 - 3x) \cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2} .$$

Antes de usar as regras da derivación e como o numerador é un polinomio de grao maior que o denominador, podíamos usar a división de polinomios e, recordando que $\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$, escribir a función como:

$$y = x - 8 + \frac{40}{x + 5} \Rightarrow y' = 1 - \frac{40}{(x + 5)^2} = \frac{(x + 5)^2 - 40}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2} .$$

Recódoche que isto o fixemos en 1º ao tratar a función de proporcionalidade inversa. Esta técnica máis que axudarnos ao derivar, pode servírnos para orientarnos cando teñamos que representar funcións.

$$\text{c) } y' = \frac{-2xe^{-x^2} \cdot x^2 - e^{-x^2} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2xe^{-x^2}(x^2 + 1)}{x^4} = \frac{-2e^{-x^2}(x^2 + 1)}{x^3} .$$

16. Calcula la derivada de a) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$; b) $y = \frac{e^{2x} \cdot \ln x}{x^3}$; c) $y = \frac{(4x - 1)^2}{(3x + 2)^2}$.

Solución:

$$\text{a) } f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 3) - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 11}{(x - 3)^2} ;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= \frac{(2e^{2x} \ln x + e^{2x} \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^3 - e^{2x} (\ln x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{(2xe^{2x} \ln x + e^{2x}) \cdot x^2 - 3x^2 e^{2x} \ln x}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{x^2 e^{2x} (2x \ln x + 1 - 3 \ln x)}{x^6} = \\ &= \frac{e^{2x} (2x \ln x - 3 \ln x + 1)}{x^4} ; \end{aligned}$$

$$\text{c) } y' = \frac{2(4x - 1) \cdot 4 \cdot (3x + 2)^2 - (4x - 1)^2 \cdot 2(3x + 2) \cdot 3}{(3x + 2)^4} = \frac{(3x + 2)(4x - 1)[8 \cdot (3x + 2) - 6 \cdot (4x - 1)]}{(3x + 2)^4} = \frac{22(4x - 1)}{(3x + 2)^3} .$$

3. Derivabilidade

Sabemos que para que unha función sexa derivable debe ser previamente continua. Non obstante, esta só é unha condición necesaria, pero non suficiente, pois non todas as funcións continuas son derivables. O exemplo habitual é a función valor absoluto, que nos permitirá introducir as derivadas laterais. Vexámolo:

Canto vale a derivada do valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$?

Dado que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ é continua en $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \quad \text{Como calculamos o límite?}$$

Fíxate que é distinto pola esquerda $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ que pola dereita $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$ polo que debemos concluír que non existe $f'(0)$. Polo tanto, é unha función continua nun punto, pero non derivable no devandito punto.

A definición das derivadas laterais é claramente:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \equiv \text{derivada pola esquerda.}$$

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \equiv \text{derivada pola dereita.}$$

Non te preocupes, xa que para calcular as derivadas laterais nun punto, se se trata de funcións definidas a anacos (o máis habitual), calcúlase a derivada da función que estea no anaco que interese e substitúese o valor do punto. No exemplo anterior

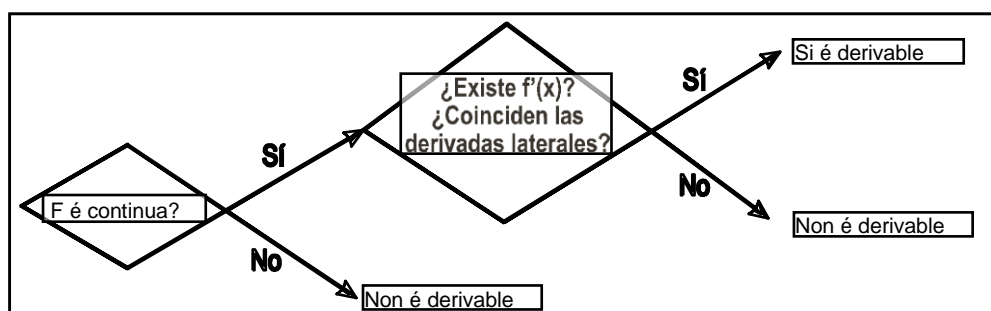
As outras funcións que presentarán problemas na derivada son aquelas que ao derivar se convarten en funcións con denominadores, como as que teñen radicais. Observa o que

pasa con $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Esta función é continua en $x=0$, pois $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$

pero non é derivable no devandito punto: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow f$ é

continua en \mathbb{R} e derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En resumo, para estudar a derivabilidade dunha función primeiro estúdase a continuidade e despois calcúlase a derivada, en ocasións a partir das derivadas laterais. Se coinciden, a función é derivable e se non coinciden, non é derivable.



Exemplos

19 É derivable?
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{ ó si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \text{sen } x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \text{cos } x, & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{en } x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} ?$$

Solución: Estudio en $x=0$

Continuidade: $f(0) = \text{sen } 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$

é continua en $x = 0$

Derivabilidade: $f'(0^-) = 0|_{x=0} = 0$; $f'(0^+) = \text{cos } x|_{x=0} = 1 \Rightarrow \nexists f'(0)$

Estudo en $x = \frac{\pi}{4}$

Continuidade: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{cos } x|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \text{cos } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) \Rightarrow$
 é continua en $x = \frac{\pi}{4}$

Derivabilidade: $f'\left(\frac{\pi}{4}^-\right) = \text{cos } x|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}^+\right) = -\text{sen } x|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \nexists f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Estudo en $x = \frac{\pi}{2}$

Continuidade: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{cos } x = 0$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 0 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow$

é continua en $x = \frac{\pi}{2}$

Derivabilidade: $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = -\text{sen } x|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = 0|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \nexists f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

20. Estuda a continuidade e a derivabilidade de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución: O único punto no que pode presentar problemas é en $x=1$, que é onde cambia de definición.

Continuidade:

$f(1) = 2x-1|_{x=1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ é continua en $x=1$.

Derivabilidade:

$$f'(1^-) = 2x|_{x=1} = 2; f'(1^+) = 2|_{x=1} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow$$

é derivable en $x=1$. Polo tanto, f é continua e derivable en todo \mathcal{R}

$$21. \text{ ¿Es } f(x) = \begin{cases} 1-4x, & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+5, & \text{si } x > -2 \end{cases} \text{ derivable en } x = -2?$$

Solución:

Continuidade:

$f(-2) = (1-4x)|_{x=-2} = 9$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (1-4x) = 9$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2+5) = 9 \Rightarrow$ é continua en $x = -2$.

Derivabilidade:

$$f'(1^-) = 2x|_{x=1} = 2; f'(1^+) = 2|_{x=1} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow$$

Si é derivable en $x = -2$.

22. É derivable a función no $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2-8}$ intervalo $[0,3]$?

Solución: Como é unha raíz cúbica non presenta problemas para ningún número (a raíz cúbica dun número negativo é un número negativo), polo que $\text{Dom } f = \mathcal{R}$ e, por iso, será continua en \mathcal{R} e tamén, lóxicamente, en calquera intervalo da devandita recta.

$$f(x) = 5(x^2-8)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}(x^2-8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(x^2-8)^2}} \Rightarrow \text{DEN} = 0 \Rightarrow (x^2-8)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists f'(\pm\sqrt{8}).$$

Vese doadamente que $1 \leq \sqrt{8} \leq 3 \Rightarrow f$ é derivable en $[1, 3] - \{8\}$.

4. Derivadas sucesivas

Pódenos servir para algo achar a taxa de variación instantánea da derivada? Fíxate en que a derivada é unha función, polo que podemos calcular o seu TVI, que será a derivada da derivada. A derivada da derivada dunha función recibe o nome de derivada segunda e na unidade seguinte usarala para estudar a curvatura (concavidade e convexidade) dunha función. Defínese como:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Este proceso podémolo prolongar indefinidamente e así teremos a derivada terceira f''' (que é derivar a derivada segunda), a derivada cuarta $f^{(4)}$ (que é derivar a derivada terceira), a derivada quinta $f^{(5)}$ (derivar a derivada cuarta), ..., a derivada n-sima ou enésima $f^{(n)}$.

Observa a notación: úsanse números romanos para as primeiras e unha paréntese co grao para as de orde superior co fin de non as confundir coas potencias. Estas derivadas de ordes superiores (que é un nome que a miúdo reciben) calcúlanse coas mesmas regras que vimos para a derivada, que agora se chama derivada primeira (e simplemente derivada cando non hai confusión posible).

As derivadas de ordes sucesivas utilízanse para calcular o desenvolvemento en serie de Taylor para unha función, utilísima ferramenta que permite descubrir o valor da raíz cadrada, seno, coseno, exponencial, logaritmo, etc., de calquera número. En concreto, este tipo de desenvolvemento é o que está presente nas calculadoras científicas, permitíndonos efectuar todos os cálculos que necesitamos. O desenvolvemento consiste en atopar un polinomio que se aproxima á función e que é o que usamos para os cálculos.

Exemplos

23. Calcula a derivada segunda das seguintes funcións:

$$\text{a) } y = \frac{3x-1}{3x^2+1}; \text{ b) } y = x^2 \ln x; \text{ c) } y = \frac{x+1}{x^2+x-2}.$$

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{3(1+2x-3x^2)}{(3x^2+1)^2} \Rightarrow y'' = 3 \frac{(2-6x) \cdot (3x^2+1)^2 - (1+2x-3x^2) \cdot 2 \cdot (3x^2+1) \cdot 6x}{(3x^2+1)^4}$$

Antes de efectuar as multiplicacións, sacaremos factor común no numerador. O factor común non é máis que o denominador, algo que sempre sucede nas fraccións alxébricas:

$$\begin{aligned} y'' &= 3 \frac{(3x^2+1)[(2-6x) \cdot (3x^2+1) - (1+2x-3x^2) \cdot 2 \cdot 6x]}{(3x^2+1)^4} = 3 \frac{2-6x+6x^2-18x^3-12x-24x^2+36x^3}{(3x^2+1)^3} = \\ &= \frac{6(9x^3-9x^2-9x+1)}{(3x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } y' = 2x \ln x + x \Rightarrow y'' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3;$$

$$\text{c) } y' = -\frac{x^2+2x+3}{(x^2+x-2)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{(2x+2) \cdot (x^2+x-2) - (x^2+2x+3) \cdot 2 \cdot (2x+1)}{(x^2+x-2)^3}.$$

Observa que xa fixemos a simplificación da que falabamos no apartado **a)**:

$$y'' = -\frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 - (4x^3 + 10x^2 + 16x + 6)}{(x^2 + x - 2)^3} = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 9x + 5)}{(x^2 + x - 2)^3}.$$

24. Descobre a derivada segunda de: **a)** $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$; **b)** $y = x^3 - 3x$; **c)** $y = \frac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1}$.

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{(4x^3 + 6x) \cdot (x^2 + 1) - (x^4 + 3x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow y'' = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$\text{b) } y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'' = 6x.$$

c) Transformamos a función desenvolvendo o binomio e efectuando a división de polinomios:

$$y = \frac{4x^2 + 1 - 4x}{4x^2 + 1} = 1 - \frac{4x}{4x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{16x^2 - 4}{(4x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{32x(4x^2 + 1) - (16x^2 - 4)2 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^3} = \frac{-128x^3 + 96x}{(4x^2 + 1)^3} = \frac{-32x(4x^3 - 3x)}{(4x^2 + 1)^3}.$$

25 Acha a derivada segunda das seguintes funcións **a)** $y = \frac{1}{x^2 + x}$; **b)** $y = xe^{2x}$; **c)** $y = \frac{3x^2 + x}{x + 2}$.

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{-(2x+1)}{(x^2 + x)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{2(x^2 + x) - (2x+1) \cdot 2 \cdot (2x+1)}{(x^2 + x)^3} = \frac{2(3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x)^3}.$$

$$\text{b) } y' = (1 + 2x)e^{2x} \Rightarrow y'' = (2 + 2 + 4x)e^{2x} = 4(1 + x)e^{2x}.$$

c) Simplificamos a función dividindo os polinomios:

$$y = 3x - 5 + \frac{10}{x+2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{10}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{20}{(x+2)^3}.$$