

Exercicios de apoio

Exercicio nº 1.-

Calcula a derivada **a)** $y = \frac{1}{1+x^2}$; **b)** $y = \frac{x^2}{x^2-4}$; **c)** $f(x) = \frac{8(x-1)^2}{x^3}$.

Solución: **a)** $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$; **b)** $y' = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$; **c)** $y' = \frac{8(-x^2+4x-3)}{x^4}$.

Exercicio nº2.-

Deriva: **a)** $y = 7e^{2x-1} - 3x^4 + 5x$; **b)** $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Solución:

a) $y' = 14e^{2x-1} - 12x^3 + 5$; **b)** $y' = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2}$; **c)** $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Exercicio nº3.-

A función $f(x)$ está definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ x-2 & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ x^2-2x-6 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Estudia a súa continuidade e a súa derivabilidade.

Solución:

Continuidade: **a)** $f(x)$ non é continua en $x = 0$ **b)** $f(x)$ é continua en $x = 4$

Derivabilidade: **a)** $f(x)$ é derivable en $x \neq 0$ e $x \neq 1$ **b)** $f(x)$ non é derivable en $x = 0$

c) $f(x)$ non é derivable en $x = 4$

Exercicio nº 4.-

Estudia a continuidade e a derivabilidade da seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{se } x < 0 \\ x^2+2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución :

Continuidade: **a)** $f(x)$ é continua en $x = 0$ **b)** $f(x)$ non é continua en $x = 1$

Derivabilidade: **a)** $f(x)$ é derivable en $x \neq 0$ e $x \neq 1$ **b)** $f(x)$ é derivable en $x = 0$

c) $f(x)$ non é derivable en $x = 1$

Exercicio nº 5.-

Estuda a derivabilidade da función $f(x) = \sqrt{x-7}$

Solución: f é derivable en $[7, \infty)$

Exercicio nº 6.-

Calcula os valores de a e b para que $f(x)$ sexa continua e derivable en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{se } x \leq 1 \\ bx^2 + 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solución: $b = 1$, $a = 0$

Exercicio nº 7.-

Calcula a derivada segunda **a)** $y = x^2 e^{-3x+1}$; **b)** $y = \frac{10}{8-x}$; **c)** $y = \frac{38x-100}{0,4x}$.

Solución:

$$\text{a) } y'' = (2 - 12x + 9x^2) e^{-3x+1}; \quad \text{b) } y'' = -\frac{20}{(8-x)^3}; \quad \text{c) } y'' = -\frac{500}{x^3}.$$

Exercicio nº 8.-

Acha a derivada segunda de **a)** $y = 7e^{2x-1} - 3x^4 + 5x$; **b)** $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Solución:

$$\text{a) } y'' = 28e^{2x-1} - 36x^2; \quad \text{b) } y'' = \frac{2(3x^2-9x+7)}{(x^2-3x+2)^3}; \quad \text{c) } f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Exercicios resoltos:

Exercicio nº 1.-

$$\text{a) } y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad \text{b) } y = \frac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow y' = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2};$$

$$\text{c) } y = \frac{8(x-1)^2}{x^3} = 8 \left(\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = 8 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \Rightarrow y' = 8 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right) \Rightarrow y' = \frac{8(-x^2 + 4x - 3)}{x^4}.$$

Exercicio nº 2.-

$$\text{a) } y = 7e^{2x-1} - 3x^4 + 5x \Rightarrow y' = 14e^{2x-1} - 12x^3 + 5; \quad \text{b) } y = \frac{1}{x^2-3x+2} \Rightarrow y' = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2};$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Exercicio nº 3.-

• Continuidade:

– Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$: $f(x)$ é continua, pois está formada por funcións continuas.

– En $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2 \end{array} \right\} f(x) \text{ non es continua en } x = 0.$$

– En $x = 4$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 2x - 6) = 2 \\ f(4) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

• Derivabilidade:

– Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$: $f(x)$ é derivable, é sua derivada é:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 4 \\ 2x-2 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

– En $x = 0$: Non é derivable, pois non é continua.

$x = 4$: Como $f'(4^-) = 1 \neq f'(4^+) = 6$, $f(x)$ non é derivable en $x = 4$.

Exercicio nº 4.-

• Continuidade:

– Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ é continua, pois está formada por funcións continuas.

– En $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

– En $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} f(x) \text{ no es continua en } x = 1.$$

• Derivabilidade:

– Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ é derivable, e sua derivada é:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

– En $x = 0$: Como $f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$, $f(x)$ é derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

– En $x = 1$: Non é derivable, pois non é continua.

Exercicio nº 5.-

Obsérvase que $\text{Dom } f = [7, \infty)$ sendo continua en todo o seu dominio, aínda que en $x = 7$ só podemos calcular un límite lateral, pois o outro faría que o radicando fose negativo, o sexa que non existe límite cando x tende a 7^- .

O límite cando x tende a 7^+ $\lim_{x \rightarrow 7^+} \sqrt{x-7} = 0 = f(7)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-7}} \Rightarrow \text{DEN} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-7} = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow f'(7) = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists f'(7) \Rightarrow$$



É doado ver que

f é derivable en $[7, \infty)$

Exercicio nº 6.-

• Continuidade:

– Si $x \neq 1$: $f(x)$ é continua, pois está formada por funcións continuas.

– En $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 + 2x - 1) = b + 1 \\ f(1) &= 2 + a \end{aligned} \right\}$$

Para que sexa continua, ha de ser $2 + a = b + 1$, é decir: $a = b - 1$

• Derivabilidade:

– Si $x \neq 1$: $f(x)$ é derivable, e sua derivada é:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ 2bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

– En $x = 1$: Para que sexa derivable, debe ser:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4 + a \\ f'(1^+) &= 2b + 2 \end{aligned} \right\} \quad 4 + a = 2b + 2 \rightarrow a = 2b - 2$$

• Unindo as duas condicións anteriores, temos que:

$$\left. \begin{aligned} a &= b - 1 \\ a &= 2b - 2 \end{aligned} \right\} \quad b - 1 = 2b - 2 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = 0$$

Exercicio nº 7.-

a) $y' = (2 - 3x)xe^{-3x+1} \Rightarrow y'' = (2 - 12x + 9x^2)e^{-3x+1}$; b) $y' = \frac{10}{(8-x)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{20}{(8-x)^3}$; c) $y' = \frac{250}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{500}{x^3}$.

Exercicio nº 8.-



a) $y' = 14e^{2x-1} - 12x^3 + 5 \Rightarrow y'' = 28e^{2x-1} - 36x^2$; b) $y' = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = \frac{-2(x^2-3x+2) - (3-2x) \cdot 2(2x-3)}{(x^2-3x+2)^3} = \frac{2(3x^2-9x+7)}{(x^2-3x+2)^3}$; c) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$.