

Exercicios de autoavaliación

Exercicio nº 1.-

Calcula a derivada

a) $y = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$; b) $y = xe^{-x^2}$; c) $y = \frac{3x^2-x}{x+2}$..

Exercicio nº 2.-

Acha a derivada de

a) $y = \ln(5x^3 - 6x^2 + 7)$; b) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$.

Exercicio nº 3.-

Calcula a derivada:

a) $y = \sin(x^2 + 2x)$; b) $y = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Exercicio nº 4.-

Estuda a continuidade e a derivabilidade de

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3x + 8, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercicio nº 5.-

Estuda a derivabilidade das seguintes funcións:

a) $y = \sqrt{2x^2 + 5}$; b) $f(x) = \ln(4x^2 - 1)$; c) $y = 2x \cdot |x|$.

Exercicio nº 6.-

Descobre o valor de **a** e **b** para que a función:
Sexa continua e estuda a derivabilidade
de **f** para os devanditos valores.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & \text{si } x < -1 \\ 3 + ax, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ bx + 2a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercicio nº 7.-

Estuda a derivabilidade de

$$y = \frac{1-|x|}{1+|x|}.$$

Exercicio nº 8.-

Acha **a** e **b** para que a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & \text{si } x \leq 2 \\ 5x + b, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sexa continua e derivable

Exercicio nº 9.-

Calcula a derivada segunda de :

a) $y = \ln(5x^3 - 6x^2 + 7)$; b) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$.

Exercicio nº 10.-

Descobre a derivada segunda de:

a) $y = \sin(x^2 + 2x)$; b) $y = \frac{x(x+1)+1}{x+1}$.

Solucións dos exercicios

Exercicio nº 1.-

$$a) y = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12} = \frac{-x^3+1}{2(x^2+x-6)} \Rightarrow y' = \frac{-3x^2(x^2+x-6) - (-x^3+1)(2x+1)}{2(x^2+x-6)^2} = \frac{-x^4-2x^3+18x^2-2x-1}{2(x^2+x-6)^2};$$

$$b) y = xe^{-x^2} \Rightarrow y' = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$c) y = \frac{3x^2-x}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{(6x-1)(x+2) - (3x^2-x)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x-2}{(x+2)^2}.$$

Exercicio nº 2.-

$$a) y = \ln(5x^3 - 6x^2 + 7) \Rightarrow y' = \frac{15x^2 - 12x}{5x^3 - 6x^2 + 7}; \quad b) y = \sqrt{x^2 - 5x + 3} \Rightarrow y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 3}}.$$

Exercicio nº 3.-

$$a) y = \sin(x^2 + 2x) \Rightarrow y' = 2(x+1)\cos(x^2 + 2x);$$

$$b) y = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)(x-1) - (x\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac{3x\sqrt{x}}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{2} - x\sqrt{x} + 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{x\sqrt{x}}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + 1}{(x-1)^2} = \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}{2(x-1)^2}.$$

Exercicio nº 4.-

Continuidade:

$$f(2) = x^2 - 3x + 8 \Big|_{x=2} = 6; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+4) = 6; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3x + 8) = 6 \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$$

continua en $x=2$

Derivabilidade:

$$f'(2^-) = 1 \Big|_{x=2} = 1; f'(2^+) = 2x - 3 \Big|_{x=2} = 1 \Rightarrow f'(2) = 1 \Rightarrow \text{é derivable en todo } \mathcal{R}.$$

Exercicio nº 5.-

a) $y = \sqrt{2x^2 + 5} \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5}}$. Como $DEN \neq 0 \Rightarrow$ é derivable en todo \mathcal{R}

b) $f(x) = \ln(4x^2 - 1) \Rightarrow Dom f = \{x \in \mathcal{R} / 4x^2 - 1 > 0\} \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$Dom f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

f é continua en todo seu dominio

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$sgn(4x^2 - 1)$	+	-	+

$f'(x) = \frac{8x}{4x^2 - 1}$. Vemos que f' podese calcular en todo os puntos do dominio de f , logo podemos afirma que é derivable en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$

c) Escribimos a función usando a definición do valor absoluto: $y = \begin{cases} -2x^2, & \text{si } x < 0 \\ 2x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
O único punto problemático é $x=0$

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow$ é continua

$f'(0^-) = -4x|_{x=0} = 0; f'(0^+) = 4x|_{x=0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow f$ é derivable

Exercicio nº 6.-

$f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & \text{si } x < -1 \\ 3 + ax, & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \\ bx + 2a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Posibles puntos de discontinuidade $x = -1$, $x=1$

Continuidade

$x=-1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 - b) = a - b; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 + ax) = 3 - a \Rightarrow a - b = 3 - a.$

$x=1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 + ax) = 3 + a; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx + 2a) = b + 2a \Rightarrow 3 + a = b + 2a.$

$$\begin{cases} a - b = 3 - a \\ 3 + a = b + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1.$$

Para estes valores de a e b a derivabilidade queda

$$f'(-1^-) = 4x|_{x=-1} = -4; \quad f'(-1^+) = 2|_{x=-1} = 2 \Rightarrow \nexists f'(-1);$$

$$f'(1^-) = 2|_{x=1} = 2; \quad f'(1^+) = 1|_{x=1} = 1 \Rightarrow \nexists f'(1).$$

Polo tanto, f é derivable en $\mathcal{R} - \{-1, 1\}$

Exercicio nº 7.-

$$y = \frac{1-|x|}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \quad \text{Posible punto de discontinuidade } x=0$$

Continuidade $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x}{1-x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$ é contínua

Derivabilidade:

$$f'(0^-) = \frac{2}{(1-x)^2} \Big|_{x=0} = 2; \quad f'(0^+) = \frac{-2}{(1-x)^2} \Big|_{x=0} = -2 \Rightarrow \nexists f'(0). \quad f \text{ é derivable en } \mathcal{R} - \{0\}$$

Exercicio nº 8.-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & \text{si } x \leq 2 \\ 5x + b, & \text{si } x > 2 \end{cases}. \quad \text{Posible punto de discontinuidade } x=2$$

Continuidade:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - ax) = 4 - 2a; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5x + b) = 10 + b \Rightarrow 4 - 2a = 10 + b.$$

Derivabilidade:

$$f'(2^-) = 2x - a|_{x=2} = 4 - a; \quad f'(2^+) = 5|_{x=2} = 5 \Rightarrow 4 - a = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -6 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -4.$$

Exercicio nº 9.-

$$\text{a) } y' = \frac{15x^2 - 12x}{5x^3 - 6x^2 + 7} \Rightarrow y'' = \frac{(30x - 12)(5x^3 - 6x^2 + 7) - (15x^2 - 12x)(15x^2 - 2x)}{(5x^3 - 6x^2 + 7)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-75x^4 - 180x^3 + 68x^2 + 210x - 84}{(5x^3 - 6x^2 + 7)^2},$$

$$\text{b) } y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 3}} \Rightarrow y'' = \frac{2\sqrt{x^2 - 5x + 3} - (2x - 5)\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 3}}}{2(x^2 - 5x + 3)} \Rightarrow y'' = \frac{-13}{4(x^2 - 5x + 3)^{3/2}}.$$



Exercicio nº 10.-

a) $y' = (2x + 2) \cdot \cos(x^2 + 2x) \Rightarrow y'' = 2 \cos(x^2 + 2x) - (2x + 2)^2 \operatorname{sen}(x^2 + 2x);$

b) $y = x + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$