

Unidade 5. Límite, continuidade, e asíntotas dunha función

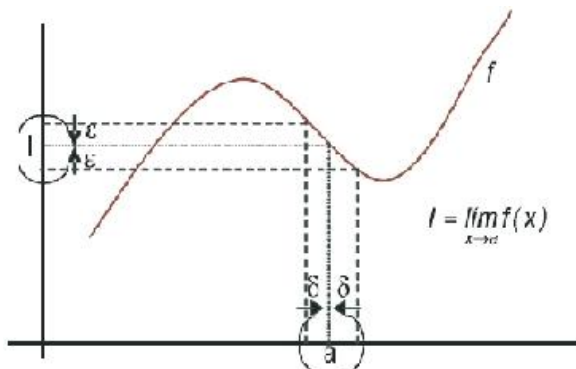
1. Límite dunha función

Nunha primeira aproximación, son tres os límites que podemos calcular nunha función: nun punto $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, no infinito $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e no menos infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Os conceptos básicos aprendémolos en 1º. Aquí afondaremos para mellorar na comprensión e no cálculo dos devanditos límites.

1.1. Límite dunha función nun punto

O límite dunha función nun punto é o valor ao que se cerca a devandita función cando a variable se achega ao punto. Que significa achegarse? Pois que a distancia entre ambos os dous (función e o seu límite, variable e valor no punto) se acurta. Como se calcula a distancia na recta real? Achando o valor absoluto da diferenza entre os dous valores (tómase valor absoluto para que a distancia sempre sexa positiva). Se o límite é finito, o límite defínese, e escríbese en forma matemática, como:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow$ Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ entón $|f(x) - l| < \epsilon$



Abreviadamente escríbese $\forall \equiv$ para todo, $\exists \equiv$ existe.

Observa que para que x se achegue ao punto imponse a condición $0 < |x - a| < \delta$, onde δ é una cantidade que debe ser cada vez máis pequena. Hai que excluir o punto, pois $x = a$ non verifica a inecuación $0 < |x - a|$.

Unha vez que obrigamos a variable a achegarse ao punto, a función está obrigada a achegarse ao seu límite, se é que o ten. Isto garánteo a 2ª inecuación, onde aparece o termo que, por suposto, está relacionado e depende de δ .

Exemplo:

1. Usando a definición demostra que a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

Solución: Escribimos a definición para cada caso particular

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - 3| < \delta$ entón $|2x - 5 - 1| < \varepsilon$. O que hai que facer é atopar una relación entre δ e ε . Fíxate que a 2ª inecuación se converte en $|2x - 6| = |2(x - 3)| = 2 \cdot |x - 3| < 2\delta \Rightarrow$ tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ teríamos demostrado o límite.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$ entón $|x^2 - 1| < \varepsilon$. Pátese de $0 < |x - 1| < \delta$ e opérase $|x^2 - 1| = |(x + 1)(x - 1)| = |x + 1| \cdot |x - 1|$. O 2º valor absoluto está acoutado por δ . O primeiro esixe máis traballo:
 $|x + 1| \leq |x| + |1| = |x - 1 + 1 + 1| \leq |x - 1| + |2| = |x - 1| + 2 \leq \delta + 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |x^2 - 1| \leq \delta (\delta + 2) = \varepsilon$. A ecuación de segundo grao en δ ten como solución positiva $\delta = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$, que é a relación buscada

Podes observar que:

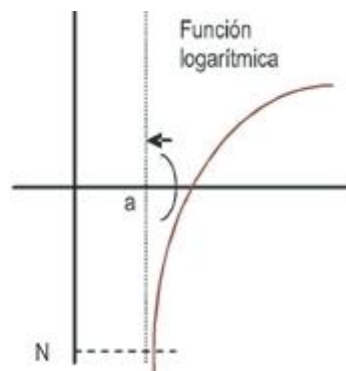
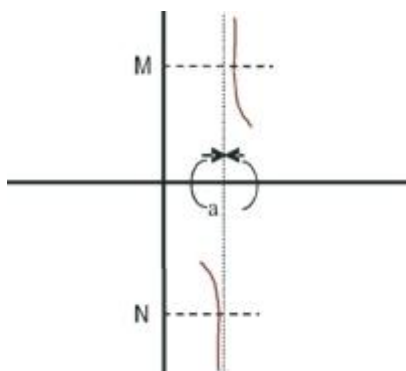
- 1º) ao complicarse a función faise moi difícil descubrir a relación entre os termos δ e ε .

2º) a definición non serve para calcular o límite dunha función directamente, aínda que si para demostrar as fórmulas da álgebra de límites que vimos en 1º e que aquí repetiremos, sen demostración.

A pesar de que na definición excluamos o punto, para o cálculo do límite habitualmente substituiremos o devandito valor na función e así obteremos o devandito límite. Recordamos que isto é así porque traballamos con funcións continuas.

En realidade, o límite componse doutros dous, chamados límites laterais: pola esquerda ($x \rightarrow a^-$) e pola dereita ($x \rightarrow a^+$), que usabamos en: a) as funcións definidas a anacos, naqueles puntos nos que cambiabade definición, e en b) as funcións que presentaban discontinuidades inevitables de salto infinito, alí onde estas aparecían.

Fracción alxébrica



As discontinuidades inevitables de salto infinito preséntanse naqueles puntos nos que o límite non está acoutado, habitualmente porque o denominador se anula e non o numerador, ou porque o argumento do logaritmo se fai cero. No primeiro caso, que é o das fraccións alxébricas ou funcións definidas a partir de cocientes, os límites laterais adoitan ser distintos, mentres que no caso das funcións logarítmicas só aparece un límite lateral, pois, ao intentar calcular o outro, o argumento é negativo, polo que non existe o logaritmo e loxicamente carecerá de límite.

Se a función non está acoutada superiormente no punto, dise que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e se non está acoutada inferiormente que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

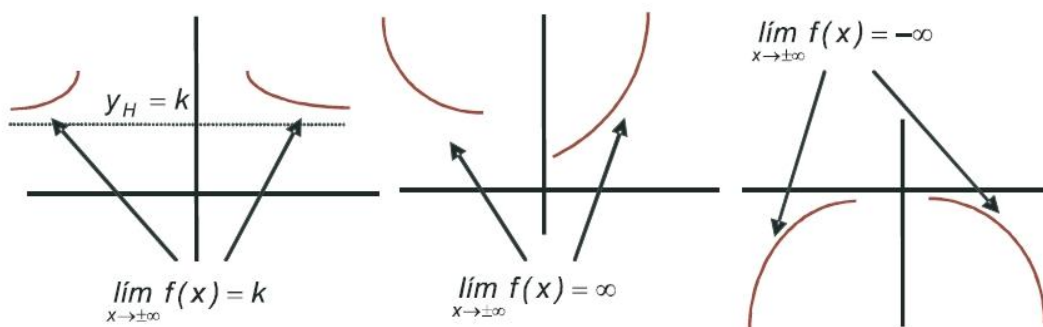
Na gráfica, M e N representan as cotas superior e inferior, respectivamente.

1.2. Límites no infinito e no menos infinito

Tamén aquí poden darse varios casos:

I. Que a función se achegue a un valor finito, que pode ser distinto en ∞ e en $-\infty$; se o valor é o mesmo en ambos os dous casos, escríbese $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$. Este valor dámos a ecuación da asíntota horizontal da función $y_H = k$

II. Que a función non estea acoutada superiormente $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, ou que non estea inferiormente $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$. Igual que no primeiro caso, os límites da función poden variar de ∞ a $-\infty$. A función non ten asíntota horizontal.



Recorda os seguintes resultados dos límites en $\pm\infty$:

$$\text{Se } r > 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \infty. & \text{P. ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = \infty \text{ se } r \text{ é par.} & \text{P. ex. } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = -\infty \text{ se } r \text{ é impar.} & \text{P. ex. } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0. & \text{P. ex. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0. \end{cases}$$

Cando se trata de polinomios, o comportamento en ∞ ou $-\infty$ vén dado polo seu monomio de maior grao, sendo desprezables os demais termos:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^5 - 7x^3 + 25x^2 - 1000) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} 4x^5$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$
- 4) Non podemos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x$

Para o cálculo de límites de función un pouco máis complexas necesitamos coñecer a **Álgebra de límites**:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$: o límite dunha suma ou resta é a suma ou resta dos límites.
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$: o límite dun produto é o produto de límites.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$: o límite dun cociente é cociente de límites.
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$: o límite dunha función elevada a outra é igual ao límite da base elevada ao límite do exponente.

Estas fórmulas serven tamén para ∞ e $-\infty$, igual que todo o que se diga a continuación. Para evitar alongar a escritura só escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Exemplos

2. Calcula os seguintes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x^2 - 16)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-3} = \frac{7}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+4}{x-3} = \frac{7}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4}{x-3} = \frac{7}{0^+} = \infty \end{cases}$ Recorda que se o denominador é

cero, o único que hai que descubrir é o signo da fracción preto do punto

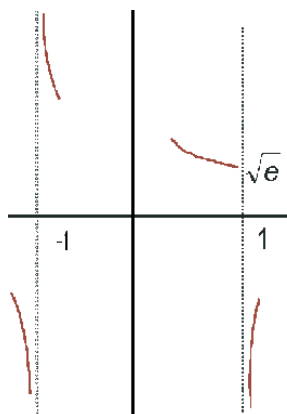
b) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x^2 - 16) = \ln 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \ln(x^2 - 16) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln(x^2 - 16) = -\infty \end{cases}$, pois $x^2 - 16 < 0$ se $x < 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^\infty = \infty \end{cases}$ Observa o cambio de comportamento, que é debido á influencia do cambio de signo na función exponencial, coa que hai que ter moito coidado.

3. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{e^{x+1}} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \ln(x^2 - 1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$; calcula $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución:

Observa que hai que calcular os límites nos puntos nos que a función cambia de definición, polo que descubrimos directamente os límites laterais:



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{e^{x+1}} = e^\infty = \infty$$

Ao substituír no límite a función que temos a cada lado hai que seguir cos límites laterais, pois énos necesario para coñecer o signo do límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{x+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) = -\infty$$

No primeiro límite lateral, podemos prescindir de seguir escribíndoo porque non hai problemas coa función,

mentres que no segundo hai que escribilo de novo, pois só existe un límite lateral. Arriba tes a gráfica da función nos puntos nos que calculamos os límites.

4) Calcula os seguintes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 - 7x + 15}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 6}{x^4 - 4x^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 7}{8x^2 - 5}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 - 7x + 15} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x) = \infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x - 6}{x^4 - 4x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 7}{8x^2 - 5} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{8x^2} = \frac{1}{8}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{4x^2} = 1$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

1.3. Indeterminacións

A aparición dalgún ∞ ou dalgún 0 (cero) en determinados lugares pode converter o límite nunha indeterminación. Xa coñecemos as indeterminacións $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$. Tamén son indeterminacións $0 \cdot \infty$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 .

Observa que, salvo 0^0 , todas as indeterminacións se deben a que ∞ non é un número e, polo tanto, non segue as regras para os números. No caso de 0^0 hai un conflito, pois $0^a = 0$, pero $a^0 = 1$, e non sabemos a que regra aternos. Estas son as 7 indeterminación posibles.

Como podes imaxinar, os casos interesantes son as indeterminacións, xa que nos demais só hai que substituír os números e operar. Para resolver estas 7 indeterminacións necesitaríamos algunha ferramenta máis potente que a división polo método de Ruffini, que só serve para polinomios. Esta ferramenta chámase **Regra de L'Hôpital** e consiste en cambiar nun cociente o numerador e o denominador polas súas respectivas derivadas, e calcular a continuación o límite.

Ainda que aplicación da devandita regra non é moi complicada, non a usaremos e resolveremos as indeterminacións como fixemos no curso anterior.

Exemplos

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{5}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{7x+1} \right) = \frac{5}{0} \cdot \frac{0}{-6} = \infty \cdot 0 \text{ (ind)} = (\text{multiplicamos as fraccións})$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x(x+1)}{(x+1)(7x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x}{(7x+1)} = \frac{5}{6}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \sqrt{x^2 + 8} \right) = 0 \cdot \infty \text{ (ind)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 8}}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sqrt{\frac{x^2 + 8}{x^2}} \right) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} \right) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \frac{0}{0} \text{ (ind) } \Rightarrow \text{(Conxugado)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tamén podemos resolver 1^∞ recorrendo á definición do **número e**:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{p(x)}\right)^{p(x)}, \text{ se } p(x) \rightarrow \infty \text{ cando } x \rightarrow \infty.$$

Deste modo, podemos escribir o seguinte:

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p(x)}\right)^{q(x)} = 1^\infty \text{ entón}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p(x)}\right)^{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{p(x)}\right)^{p(x)}\right]^{q(x)/p(x)} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p(x)}\right], \text{ onde}$$

escribimos exp en lugar do número e, para maior claridade. Polo tanto, o único que hai que descubrir é o termo $p(x)$. Os apartados j) e k) serven de exemplos.

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} &= 1^\infty \text{ (ind) } \Rightarrow 1 + \frac{1}{p(x)} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{q(x)}{p(x)} = q(x) \cdot \frac{1}{p(x)} = \\ &= \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \exp [\lim_{x \rightarrow \infty} 3] = e^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x} &= 1^\infty \text{ (ind) } \Rightarrow 1 + \frac{1}{p(x)} = \frac{5x^3}{5x^3-7} \Rightarrow \frac{1}{p(x)} = \frac{5x^3}{5x^3-7} - 1 = \frac{7}{5x^3-7}; \\ \frac{q(x)}{p(x)} &= q(x) \cdot \frac{1}{p(x)} = \frac{14x}{5x^3-7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x} = \exp \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{5x^3-7}\right] = e^0 = 1. \end{aligned}$$

2. Continuidade dunha función

Recordemos que una función f é continua nun punto $x = a$ cando:

1. Existe $f(a)$: $\exists f(a)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Habitualmente, para estudar a continuidade dunha función usamos os tres pasos antes descritos. Tamén hai que recordar que as función que poden presentar problemas na súa continuidade son as definidas a anacos (nos puntos nos que cambia de definición), as función con denominadores (alí onde se anule o devandito denominador) e as logarítmicas (onde o argumento se fai cero). Hai tres tipos de discontinuidades:

- i) **Descontinuidade inevitable de salto finito** (adoita darse en funcións definidas a anacos). Os límites laterais son distintos, pero ambos os dous finitos.
- ii) **Descontinuidade inevitable de salto infinito** (a función terá asíntotas verticais nos puntos nos que presenta este tipo de discontinuidade). A función non está acoutada no punto.
- iii) **Descontinuidade evitable** (evítase redefinindo a función nese punto). Existe o límite da función no punto (aparece a indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolta dá un límite finito), e dese modo redefínese a función.

Exemplo

4. Estuda a continuidade das seguintes función. Representa gráficamente f e esboza a gráfica de g onde sexa descontinua.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < 1 \\ -2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 5, & \text{se } x > 3 \end{cases}; \quad b) g(x) = \frac{2x-8}{x^2-x-12}$$

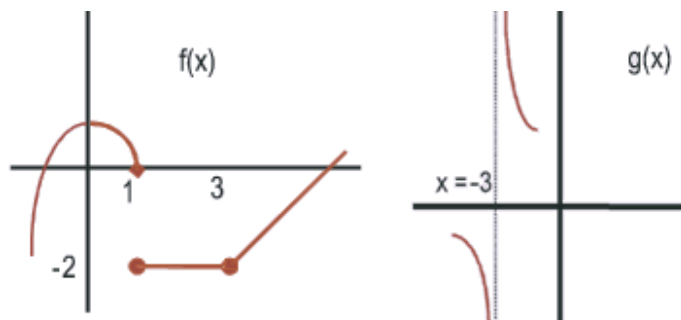
Solución:

- a) Os posibles puntos de descontinuidade son $x=1$, $x=3$.

En $x=1$: $1^\circ) f(1) = -2$; $2^\circ) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2) = -2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ non é continua en $x = 1$. É una descontinuidade de salto finito

En $x=3$: $1^\circ) f(3) = -2$; $2^\circ) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2) = -2$;
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 5) = -2 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ é continua en $x = 3$. f é continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, e presenta una descontinuidade de salto finito en $x = 1$.



- b) Os posibles puntos de descontinuidade son $x = 4$, $x = -3$ (DEN = 0)

$x = 4$ $g(4) = \frac{0}{0}$ (ind) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{7} \Rightarrow$ descontinuidade evitable.

$x = -3$ $g(-3) = \frac{14}{0} \Rightarrow$ descontinuidade inevitable de salto infinito. A función g ten una asíntota vertical en $x = -3$. Para o esbozo calculamos os límites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-8}{x^2-x-12} = \frac{-14}{0^+} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-8}{x^2-x-12} = \frac{-14}{0^-} = \infty.$$

Así, g é continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$, presenta una descontinuidade evitable en $x = 4$ e una descontinuidade inevitable de salto infinito en $x = -3$. Enriba está o esbozo de g .

O seguinte paso é definir a continuidade nun intervalo (a,b) . Parece obvio que f será continua en (a,b) cando sexa continua en todos os puntos do intervalo (a,b) . Observa que este estudo xa aparece na conclusión dos exemplos anteriores.

Exemplos

5. Descobre o valor da a para que $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2+1}, & \text{se } x < -1 \\ \frac{x}{1+ax}, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ sexa continua en todo \mathbb{R} .

Solución:

En principio, o posible punto de descontinuidade é $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x^2+1} = \frac{a}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{1+ax} = \frac{-1}{1-a} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-1}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - a^2 = -2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, 2.$$

Así, f podería ter as dúas seguintes formas:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+1}, & \text{se } x < -1 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}, \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1}, & \text{se } x < -1 \\ \frac{x}{1+2x}, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Ao observar ambas as dúas, vemos que en a) o denominador $1-x$ se anula para $x = 1$ e que en b) o denominador $1+2x$ se anula para $x = -1/2$, co que presentaría descontinuidade inevitable de salto infinito nos devanditos puntos; concluímos que f non é continua para ningún valor de a .

6. Calcula a , b , c e d para que sexa continua $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{se } x < 2 \\ 3x - a, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ b, & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ -x + c, & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ d, & \text{se } 7 \leq x \end{cases}$ e

representaa gráficamente.

Solución:

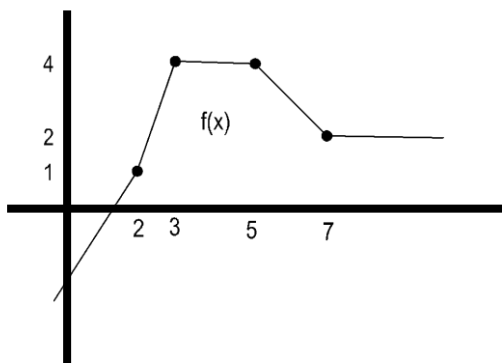
Os posibles puntos de descontinuidade son $x = 2, 3, 5, 7$. Directamente calculamos os límites laterais e igualámoslos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - a) = 6 - a \Rightarrow 1 = 6 - a \Rightarrow a = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x - 5) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} b = b \Rightarrow b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 4 = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (-x + c) = -5 + c \Rightarrow 4 = -5 + c \Rightarrow c = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} (-x + 9) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} d = d \Rightarrow d = 2$$



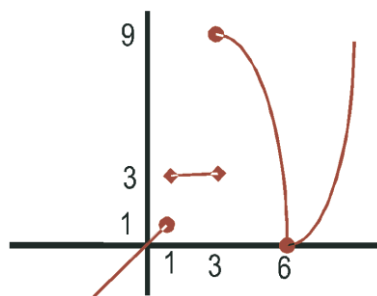
A función é da forma: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{se } x < 2 \\ 3x - 5, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 4, & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ -x + 9, & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ 2, & \text{se } 7 \leq x \end{cases}$ e a súa representación gráfica é a que aparece arriba.

7. Estuda a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 3, & \text{se } 1 < x < 3 \\ |x^2 - 6x|, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$. Representaa.

Solución:

A partir dunha observación lixeira diríamos que os únicos posibles puntos de discontinuidade son $x = 1$, $x = 3$. Non obstante, hai que considerar tamén o valor absoluto: $|x^2 - 6x| = 0 \Rightarrow x = 0, 6$. Destes dous valores, só inflúe o 6, que é o que verifica $6 \geq 3$. Podemos separalo e rescribir a función como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 3, & \text{se } 1 < x < 3 \\ -x^2 + 6x, & \text{se } 3 \leq x < 6 \\ x^2 - 6x, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$



$x = 1 \Rightarrow 1^\circ) f(1) = 1$; $2^\circ) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3 \Rightarrow$
 \Rightarrow Non é continua.

$x = 3 \Rightarrow 1^\circ) f(3) = 9$; $2^\circ) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3 = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 6x) = 9 \Rightarrow$ Non é continua

$x = 6 \Rightarrow 1^\circ) f(6) = 0$; $2^\circ) \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (-x^2 + 6x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 6^+} (x^2 - 6x) = 0 \Rightarrow$ Si é continua.

3.Asíntotas

Chámase asíntota, ou rama parabólica ou rama infinita á recta á que se achega a función cando non está acoutada nun punto (asíntota vertical), ou á recta á que se achega a función cando $x \rightarrow \pm\infty$ (asíntota horizontal e asíntota oblicua). Hai tres tipos de asíntotas:

- A asíntota vertical indica que a función tende a ∞ ou $-\infty$ conforme x se achega a un punto a . Para achar a ecuación das asíntotas verticais hai que resolver a ecuación $\text{DENOMINADOR}(x) = 0$ ou $\text{ARGUMENTO}(x) = 0$ (no caso do

logaritmo). A ecuación da asíntota vertical é $x = a$, sendo a a solución dalgúna das ecuacións anteriores. Para saber como se achega a función á asíntota calcúlanse os límites laterais.

- As asíntotas horizontal e oblicua indícanos cara a onde se achega a función cando $x \rightarrow \pm\infty$. Son dúas rectas, una delas horizontal, polo que ten pendente cero, e outra oblicua, de pendente distinta de cero.

Unha función f ten una asíntota horizontal cando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. A ecuación da asíntota horizontal é $y_H = k$, onde escribimos o subíndice H para distinguilo da función, que moitas veces se chama y . Unha función non ten asíntota horizontal cando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Se a función ten asíntota horizontal, non terá asíntota oblicua, pois a horizontal é un caso particular de oblicua, coa pendente igual a cero. Para saber como se achega a función á asíntota horizontal hai que estudar o signo da diferenza $y - y_H$ tanto en ∞ como en $-\infty$. Se $\text{sgn}(y - y_H) > 0$, y vai por riba de y_H , e se $\text{sgn}(y - y_H) < 0$, a función vai por debaixo da asíntota.

Unha asíntota oblicua é una recta de ecuación $y_{Ob} = mx + n$ á que se aproxima a función f cando $x \rightarrow \pm\infty$. Como calculamos m e n ? Se f se aproxima a y_{Ob} debe verificar os seguintes apartados.

$$1^o) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{y_{Ob}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{mx + n} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{mx} = 1 \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$2^o) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y_{Ob}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0 \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Observa que primeiro hai que calcular m , que debe ser un valor finito, pois no caso contrario non tería asíntota oblicua, e despois calcúlase n . Igual que no caso da asíntota horizontal, para ver como se achega a curva á asíntota hai que calcular o signo da diferenza $y - y_H$. Recorda que só buscaremos asíntota oblicua cando a función non teña asíntota horizontal. Tamén pode darse o caso de que a asíntota oblicua sexa distinta para $x \rightarrow \infty$ que para $x \rightarrow -\infty$.

Exemplos

8. Descobre as asíntotas de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$ e indica como se aproxima a función ás súas asíntotas.

Solución:

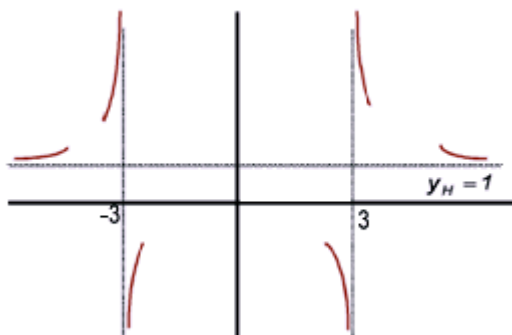
Para achar as asíntotas verticais resolvemos a ecuación $DEN = 0$, que neste caso é $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. A función aproxímase a cada asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^+} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{9}{0^+} = \infty;$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, a función ten como asíntota horizontal a recta $y_H = 1$. Achégase á asíntota horizontal: $\text{sgn}\left(\frac{x^2}{x^2-9} - 1\right) = \text{sgn}\left(\frac{9}{x^2-9}\right) > 0$.

Polo tanto, $f > y_H \Rightarrow$ a curva f vai por enriba da asíntota y_H



9. Acha as asíntotas da función $y = \frac{x^2}{x-5}$ e estuda o comportamento da función preto das súas asíntotas.

Solución:

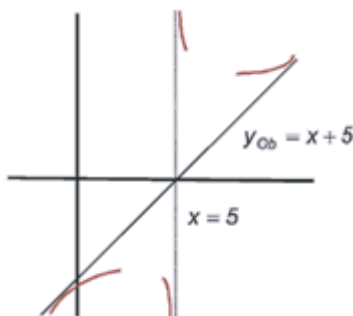
$$\text{DEN} = 0 \Rightarrow x - 5 = 0; \text{AV: } x = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{0^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{0^+} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow \text{Non ten asíntota horizontal}$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_{ob} = x + 5$$

$$\text{sgn} \left[\frac{x^2}{x-5} - (x + 5) \right] = \text{sgn} \frac{25}{x-5} \Rightarrow \begin{cases} < 0, & \text{se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_{ob} \\ > 0, & \text{se } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_{ob} \end{cases}$$

Fíxate que para que unha fracción alxébrica teña asíntota oblicua, a diferenza entre os graos de numerador e denominador debe ser 1, que é o grao da asíntota oblicua.



10. Acha as asíntotas de $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$ e estuda o seu comportamento das súas asíntotas.

Solución:

Denominador distinto de cero. Non ten asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} - 1 \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{2 - 2x}{x^2 + 1} \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{-2x}{x^2} \right) =$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\frac{-2}{x} \right) \Rightarrow \begin{cases} < 0, & \text{se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y > y_H \\ > 0, & \text{se } x \rightarrow \infty \Rightarrow y < y_H \end{cases}$$

Non ten asíntota oblicua, pois ten asíntota horizontal.

