

UNIDADE

4

Programación lineal

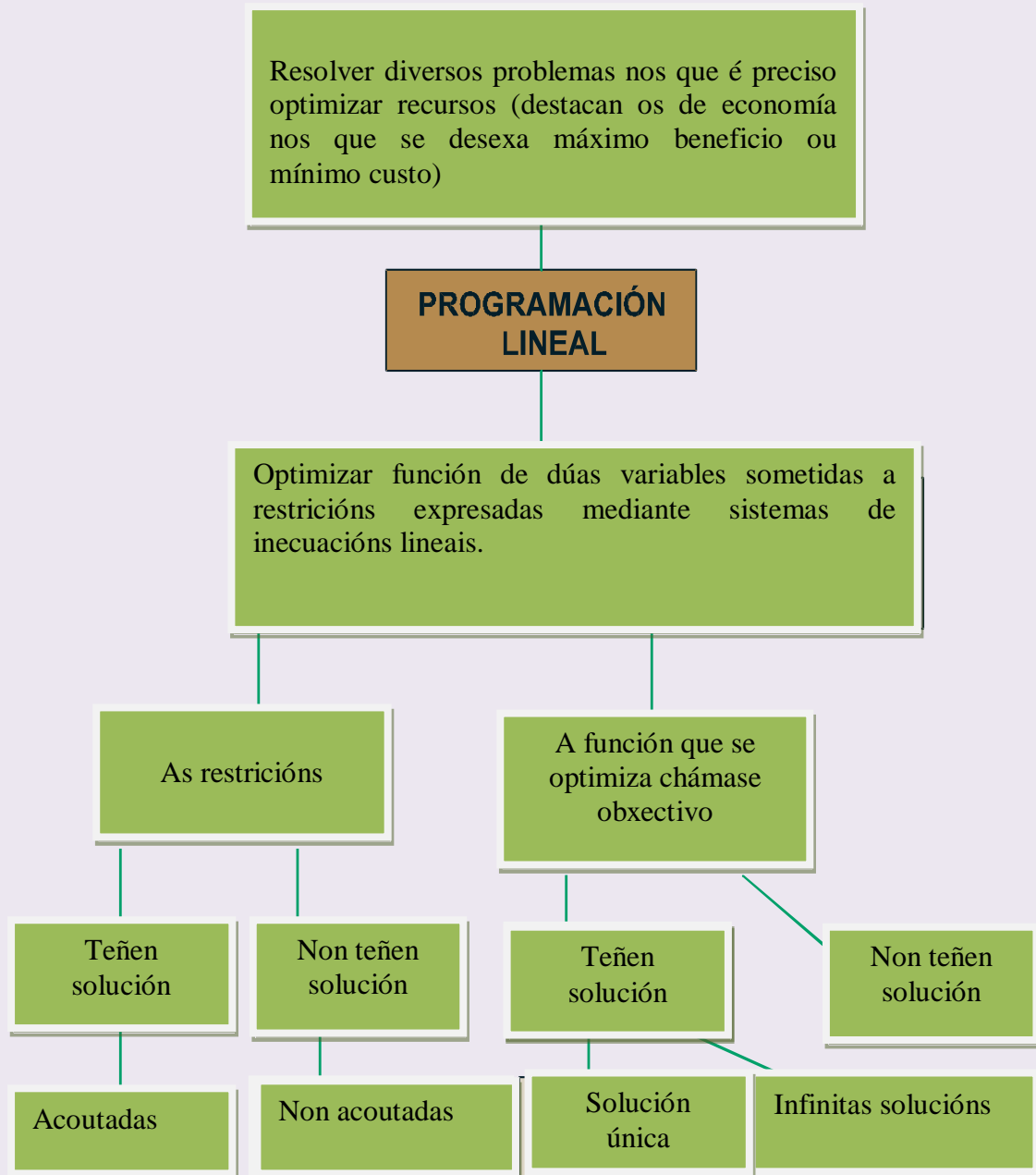
A programación lineal é parte dunha rama das matemáticas relativamente nova chamada investigación operativa. A idea básica da programación lineal é a de optimizar, é dicir, facer máxima ou mínima, unha función, coñecida co nome de función obxectivo, coa que expresamos beneficios, gastos, tempo de distribución de bens en problemas lóxicos, etc. Esta función está sometida a unha serie de restricións que veñen expresadas por inecuacións lineais.

A programación lineal tivo as súas orixes en problemas de natureza económica formulados durante a Segunda Guerra Mundial. Ao comezo os problemas formulados xurdiron da actividade militar, pero inmediatamente viuse que os seus métodos eran aplicables en moitas áreas da actividade económica onde é necesaria a toma de decisións.

O método máis coñecido de resolución de problemas de programación lineal é o Método do símplex desenvolvido polo matemático norteamericano George Dantzig en 1947. O algoritmo símplex foi elixido como un dos dez de maior influencia no desenvolvemento e a práctica da ciencia e a enxeñaría no século XX.

O Método do símplex consiste na utilización dun algoritmo iterativo para optimizar o valor da función obxectivo tendo en conta as restricións formuladas. Ao longo desta Unidade unicamente resolveremos problemas de programación lineal bidimensional, con dúas variables, para os que non é necesario o algoritmo símplex.

1. INECUACIÓNS LINEAIS CON DÚAS INCÓGNITAS	3
2. SISTEMAS DE INECUACIÓNS LINEAIS CON DÚAS INCÓGNITAS	4
3. PROGRAMACIÓN LINEAL.	6
4. PROGRAMACIÓN LINEAL DE DÚAS VARIABLES.....	6
4.1. Método gráfico para obter as solucións.	7
4.2. Método analítico para obter solucións.	7
5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	11



1. Inecuacións lineais con dúas incógnitas

Para comezar esta Unidade, parece conveniente recordar algúns conceptos xa estudados sobre **inecuacións**.

Se nas ecuacións lineais con dúas incógnitas $ax + by = c$, se substitúe o signo igual por calquera signo de desigualdade ($\geq, >, \leq, <$), estamos ante unha inecuación lineal con dúas incógnitas.

Se unha desigualdade despois de realizar transformacións de equivalencia entre desigualdades e simplificar se converte noutra da forma $ax + by \geq c$, ou con calquera dos signos ($\geq, >, \leq, <$), estamos ante unha inecuación lineal con dúas incógnitas.

Resolver unha inecuación é atopar os valores (x, y) que satisfán a desigualdade; estes valores adoitan localizarse sobre un plano cartesiano.

Sábese de cursos anteriores, que a **solución xeral** dunha inecuación lineal con dúas variables está formada polos puntos dun dos semiplanos nos que a recta $ax + by = c$ divide o plano. Unha solución particular será calquera punto que satisfaga a inecuación.

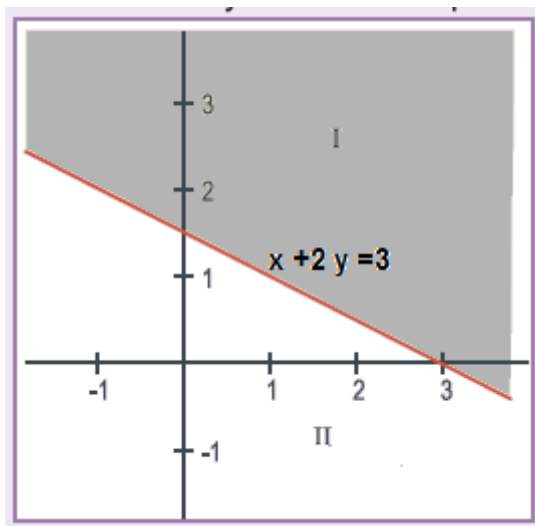
A recta de división dos semiplanos chámase **fronteira** e pertence á solución xeral no caso de desigualdade non estrita.

Exemplo

1. Atopa a solución xeral da inecuación $x + 2y > 3$. Indica se a fronteira forma parte da solución.

Solución:

A recta $x + 2y = 3$ divide ao plano nos semiplanos I e II.



Elíxese un punto do semiplano II; o máis sinxelo é $(0, 0)$ e substitúese na inecuación $0 + 2 \cdot 0 > 3$; a desigualdade é falsa, polo que a orixe e todos os puntos do semiplano II non son solución; a solución xeral fórmase os puntos do semiplano I.

Os puntos da fronteira non son solución; a desigualdade é estrita; por exemplo, o punto $(1, 1)$ da recta, ao substituílo na inecuación $1 + 2 \cdot 1 > 3$, proporciona unha desigualdade falsa.

Para resolver inecuacións lineais débense simplificar, polo que convén recordar os principios que transforman unha inecuación noutra equivalente; estes son:

- Se se suma ou resta aos dous membros dunha inecuación a mesma expresión alxébrica, a inecuación que resulta é equivalente á primeira.

$$p(x) < q(x) \Leftrightarrow p(x) + a(x) < q(x) + a(x)$$

- Se se multiplican ou dividen os dous membros dunha inecuación por un número positivo, a inecuación que resulta é equivalente á primeira.

$$\text{Se } a > 0 \text{ e } p(x) < q(x) \Leftrightarrow a \cdot p(x) < a \cdot q(x)$$

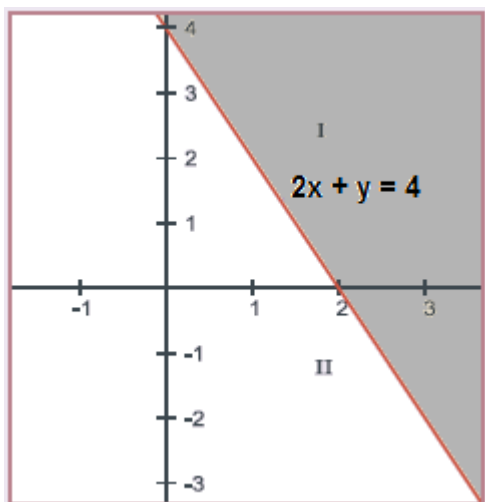
- Se se multiplican ou dividen os dous membros dunha inecuación por un número negativo, a inecuación cambiada de sentido é equivalente á primeira.

$$\text{Se } a < 0 \text{ e } p(x) < q(x) \Rightarrow a \cdot p(x) > a \cdot q(x)$$

Exemplo

2. Atopa a solución xeral da inecuación: $-x - 3y \geq -5/2 y - 2$

Solución:



Suma $5/2 y$ aos dous membros

$$-x - 3y + 5/2 y \geq -2$$

Multiplica por (-2) os dous membros: $2x + 6y - 5y \leq 4$

$$\text{Opera: } 2x + y \leq 4$$

Substitúe $(0, 0)$ na inecuación; $2 \cdot 0 + 0 \leq 4$, desigualdade verdadeira. A solución xeral está formada polos puntos do semiplano II, **sen colorear**.

2. Sistemas de inecuacións lineais con dúas incógnitas

Un **sistema de inecuacións lineais con dúas incógnitas** é o conxunto formado por dúas ou máis inecuacións lineais con dúas incógnitas; por exemplo:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &\leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &\leq b_2 \\ \dots + \dots &\leq \dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y &\leq b_n \end{aligned}$$

O signo \leq que aparece en todas as inecuacións do exemplo, pode ser substituído en calquera delas polos outros signos de desigualdade.

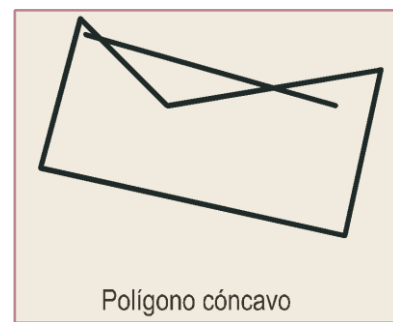
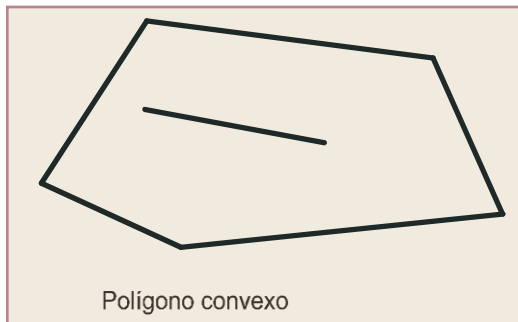
Chámase solución xeral de sistema, ou **rexión factible**, o conxunto de puntos de plano $A(x, y)$ e que cumpran simultaneamente todas as inecuacións do sistema.

Para localizar a rexión factible ou solución xeral do sistema, realízanse os pasos seguintes:

- Localízanse os semiplanos solución de cada unha das inecuacións do sistema.
- Realízase a intersección de todos os semiplanos e o recinto que resulta é a solución xeral ou **rexión factible**.

Cos sistemas de inecuacións lineais, en canto á solución, pode acontecer como no caso dos sistemas que non teñan solución; é dicir, que a rexión factible sexa o conxunto baleiro; no caso de que exista, a rexión factible pode ser acoutada (área finita) ou non acoutada (área infinita).

No caso de rexión acoutada os seus puntos estarán encerrados nun polígono convexo; é dicir, aquel en que os segmentos determinados por dous puntos interiores, ten todos os puntos do segmento no interior do polígono.



Exemplos

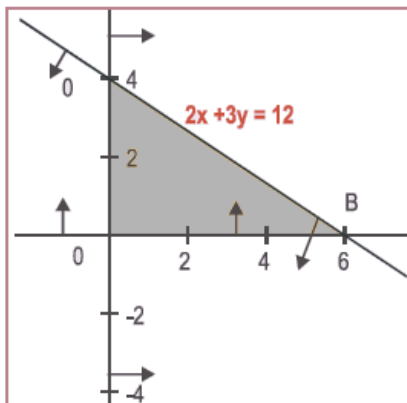
3. Atopa a rexión factible (solución xeral) dos sistemas:

$$a) \begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; c) \begin{cases} x + 2y \leq -2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

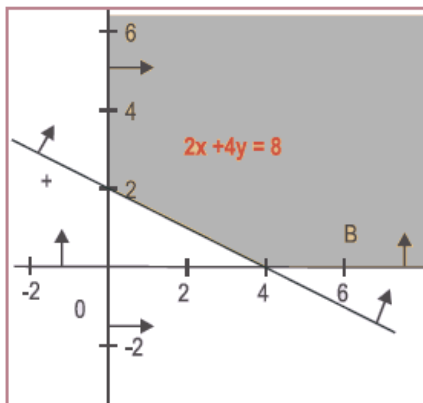
Solución:

Localízanse os tres semiplanos que corresponden ás solucións de cada unha das tres inecuacións que forman cada un dos sistemas; a súa intersección proporciona a rexión factible de cada sistema; estas son:

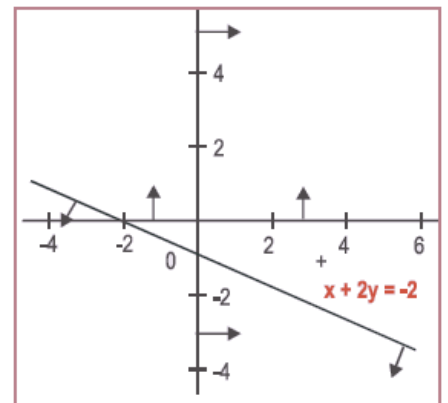
a)



b)



c)



As rexións factibles obtidas son: **a)** Acoutada; o triángulo OAB. **b)** Non acoutada. **c)** Conxunto baleiro; sen solución.

3. Programación lineal

A teoría da programación lineal utilizouse dende a segunda metade do século pasado para resolver problemas concretos como o do transporte, o da dieta e outros moitos problemas de economía.

Os problemas que resolve a programación lineal tratan de atopar o beneficio máximo en vendas ou o custo mínimo en produción, sempre tendo en conta que se dispón de recursos limitados.

Pódese dicir que coa **programación lineal** deben tratarse aqueles problemas nos que se debe **optimizar** (calcular máximos ou mínimos) unha función de varias variables, chamada **función obxectivo**, sometida a unha serie de restricións expresadas mediante sistemas de inecuacións lineais.

4. Programación lineal de dúas variables

Antes de resolver problemas concretos de programación lineal, imos ver en que consiste alxebicamente a programación lineal no caso de dúas variables.

Trátase de optimizar (calcular máximos ou mínimos) unha función de dúas variables

$$F(x, y) = ax + by \text{ ou } z = ax + by,$$

chamada **función obxectivo**, sometida ás restricións expresadas mediante un sistema de inecuacións lineais de dúas variables, como o seguinte:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &\leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &\leq b_2 \\ \dots + \dots &\leq \dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y &\leq b_n \\ x \geq 0 ; y &\geq 0 \end{aligned}$$

O signo maior ou igual, que aparece en todas as inecuacións do exemplo, pode ser substituído en calquera delas polos outros signos de desigualdade en cada problema concreto.

Do apartado anterior dedúcese que o valor óptimo da función obxectivo $F(x, y) = ax + by$, caso de existir, atópase entre os puntos da rexión factible.

Queda por estudar un método que permita calcular doadamente os puntos nos que sexa óptima a función obxectivo; trataremos un método gráfico e outro analítico.

4.1. Método gráfico para obter as solucións

Para atopar o valor óptimo, polo método gráfico, dunha función obxectivo de dúas variables sometida a unha serie de restricións, realízanse os pasos seguintes:

- Debúxase o recinto limitado polas restricións dadas mediante un sistema de inecuacións.
- Igúálase a cero a función obxectivo $ax + by = 0$ e represéntase a recta que resulta e que pasa pola orixe (0,0).
- Trasládase a recta anterior perpendicularmente á súa dirección, de modo que as rectas resultantes varran a rexión factible.
- Tómake nota dos puntos nos que as mencionadas rectas conectan ou abandonan a rexión factible; o valor ou valores da función obxectivo nos mencionados puntos proporcionannos o valor ou valores óptimos buscados.

Exemplo

4. Optimiza a función $F(x, y) = x + y$, sometida ás restricións seguintes:

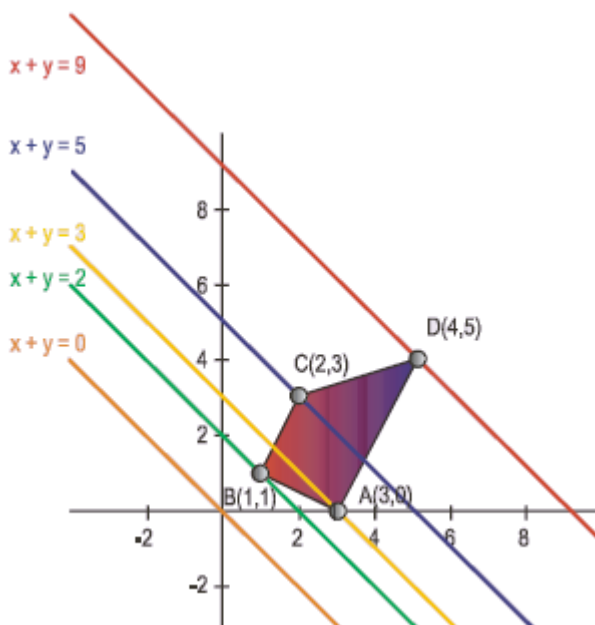
$$x + 2y \geq 3$$

$$2x - y \geq 1$$

$$x - y \geq -1$$

$$5x - y \leq 15$$

Solución:



Localízase a rexión factible e os seus vértices.

Debúxase a recta que resulta de anular a función obxectivo; $x + y = 0$ e trasládase en dirección perpendicular; vese nos desprazamentos que o feixe de rectas paralelas entra na rexión factible polo vértice **B** (1,1), onde a función obxectivo vale 2 e sae polo vértice **D** (4,5), onde a función obxectivo vale 9.

A función obxectivo toma o valor mínimo 2, en **B** (1,1) e o máximo 9 en **D** (4,5).

4.2. Método analítico para obter solucións

Este método baséase no seguinte teorema, chamado **teorema fundamental de programación lineal para dúas variables**, cuxo enunciado é o seguinte:

Unha función obxectivo de dúas variables que posúa máximo e mínimo únicos nunha rexión factible acoutada, toma os devanditos valores necesariamente nos vértices da rexión.

Se a función obxectivo toma o mesmo valor óptimo (máximo ou mínimo) en dous vértices, entón a función ten infinitas solucións situadas no segmento que determinan os dous vértices mencionados.

Se a rexión factible non está acoutada, a función obxectivo toma o valor óptimo (máximo ou mínimo) se existen, nos vértices da rexión; pero pode acontecer que non alcance algún dos devanditos valores óptimos.

Do teorema anterior dedúcese que para determinar os valores óptimos hai que:

- Debuxar o recinto limitado polas restricións do problema.
- Calcular as coordenadas dos vértices.
- Substituír as coordenadas dos vértice na función obxectivo e ver os valores onde se fai máxima e mínima.

Exemplos

5. Maximiza e minimiza a función $F(x, y) = 5x + 4y$, no recinto definido polo sistema seguinte:

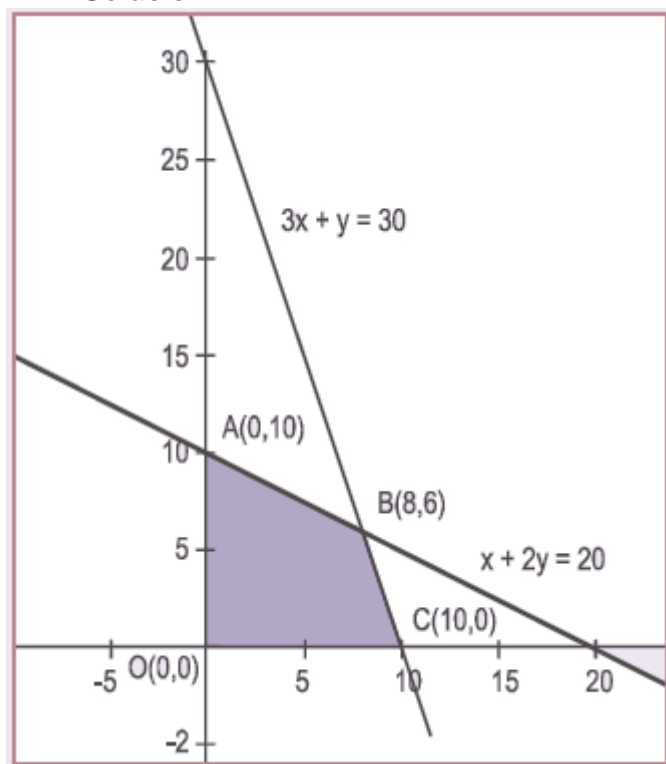
$$3x + y \leq 30$$

$$x + 2y \leq 20$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Solución:



Debúxase a rexión factible.

Calcúlanse os vértices; $O(0,0)$, $A(0,10)$ e $C(10,0)$ son inmediatos.

Para o calculo de B resólvese o sistema:

$$3x + y = 30$$

$$x + 2y = 20$$

a solución é $x=8$ e $y=6$; polo tanto, **$B(8, 6)$** é un recinto acoutado.

Substitúense os valores dos vértices na función obxectivo:

$$F_O(0,0) = 0 + 0 = 0$$

$$F_A(0,10) = 0 + 40 = 40$$

$$F_B(8,6) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 64$$

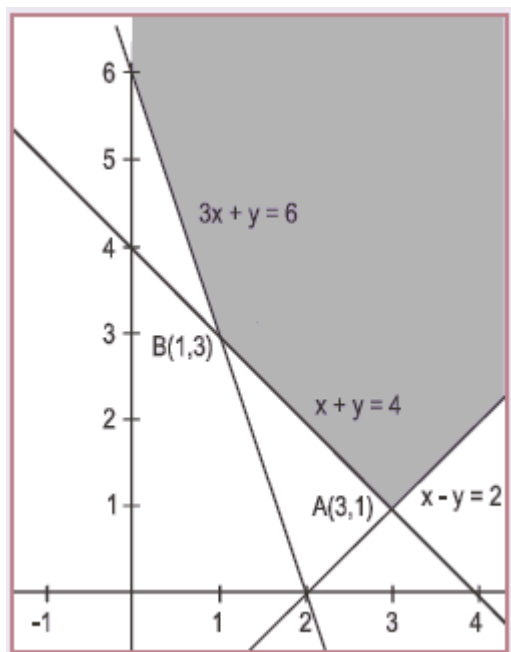
$$F_C(10,0) = 5 \cdot 10 + 0 = 50$$

A función ten un mínimo en **$O(0,0)$** e un **máximo en $B(8, 6)$** : o valor do mínimo é 0 e o do máximo 64.

6. Maximiza e minimiza se é posible a función $F(x, y) = x + 3y$, sometida ás restricións:

$$\begin{aligned}x + y &\geq 4 \\ 3x + y &\geq 6 \\ x - y &\leq 2 \\ x &\geq 0\end{aligned}$$

Solución:



Debúxase a rexión factible.

Calcúlanse os vértices; $(0,6)$ é inmediato,

Para o cálculo de A resólvese o sistema:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

a solución é $x=3$ e $y=1$, polo tanto, **A** é: **A(3,1)**.

Para o cálculo de B resólvese o sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$x=2$; $x=1$, $y=3$, polo tanto; **B** é: **B(1,3)**.

Valores da **función obxectivo** nos vértices:

$$F_A(3,1) = 3 + 3 = 6; \quad F_B(1,3) = 1 + 9 = 10; \quad F(0,6) = 0 + 18 = 18.$$

O recinto non está acoutado

A función ten un mínimo en **A(1, 3)**; vale 6 e carece de máximo; a medida que as rectas do feixe se afastan da orixe, o valor da función obxectivo aumenta.

7. Determina os valores máximos e mínimos da función $F(x, y) = 0,8x - y$. Sometida ás restricións seguintes:

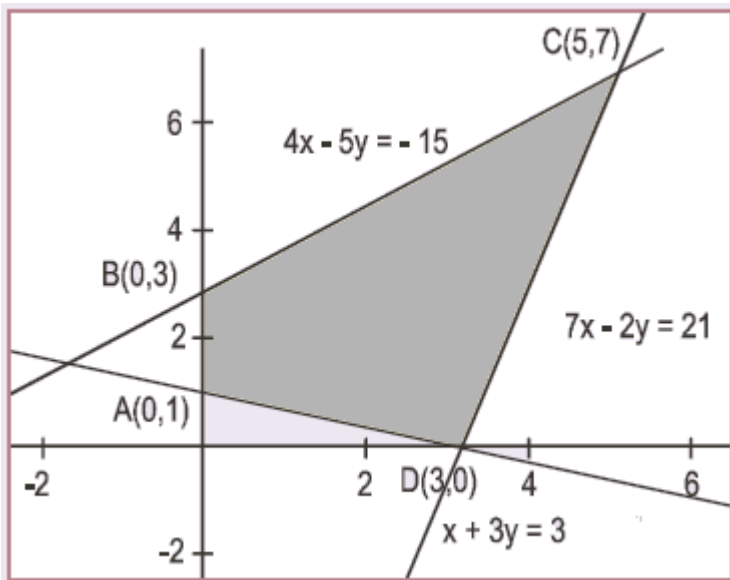
$$4x - 5y \geq -15$$

$$7x - 2y \leq 21$$

$$x + 3y \geq 3$$

$$x \geq 0$$

Solución:



Debúxase a rexión factible.

Calcúlanse os vértices; **A(0,1)**, **B(0,3)** e **D(3,0)** son inmediatos.

Para o cálculo de **C** resólvese o sistema:

$$\begin{cases} 4x - 5y = -15 \\ 7x - 2y = 21 \end{cases}$$

$27x = -135$; $x = 5$ e $y = 7$; polo tanto **C(5,7)**

Valores da función obxectivo nos vértices:

$$F_A(0,1) = 0 - 1 = -1; F_B(0,3) = 0 - 3 = -3; F_C(5,7) = 0,8 \cdot 5 - 7 = -3; F_D(3,0) = 0,8 \cdot 3 - 0 = 2,4$$

O recinto está acoutado.

O valor da función obxectivo F nos puntos B e C coincide, é -3 e é un valor mínimo, polo que a función F presenta mínimos en infinitos puntos do segmento BC ; a función ten un máximo en $D(3,0)$ e o seu valor é **2,4**

8. Determina se é posible os máximos e mínimos da función obxectivo $F(x, y) = x + 2y$, sometida ás restricións seguintes:

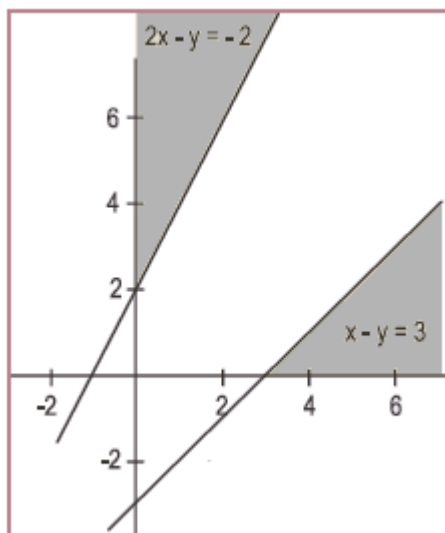
$$2x - y \leq -2$$

$$x - y \geq 3$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Solución: Debúxase a rexión factible.



A rexión factible é o conxunto baleiro; polo que o problema non ten solución.

5. Resolución de problemas de programación lineal

Neste apartado imos tratar, mediante algúns exemplos, situacións problemáticas nas que se precisa aplicar a técnica alxébrica da programación lineal estudada no apartado anterior.

Debemos recordar que para resolver os problemas que a continuación aparecen, o primeiro paso consiste en traducir o enunciado en linguaxe alxébrica.

Exemplos

9. Un camión de 9 Tm debe transportar mercadorías de dous tipos: *A* e *B*. A cantidade de *A* non pode ser inferior a 4 Tm nin superior ao dobre da cantidade de *B*. Se o transporte gaña 0,03 euros por cada kg de *A* e 0,02 euros por cada kg de *B*: pídese:

- Atopa, se existe, a rexión factible de solucións.
- Calcula, utilizando o método analítico, como se debe cargar o camión para obter a máxima ganancia.
- Determina o valor desa ganancia.

Solución:

Sexan *x* os kg do tipo *A* e *y* os do tipo *B* que transporta o camión.

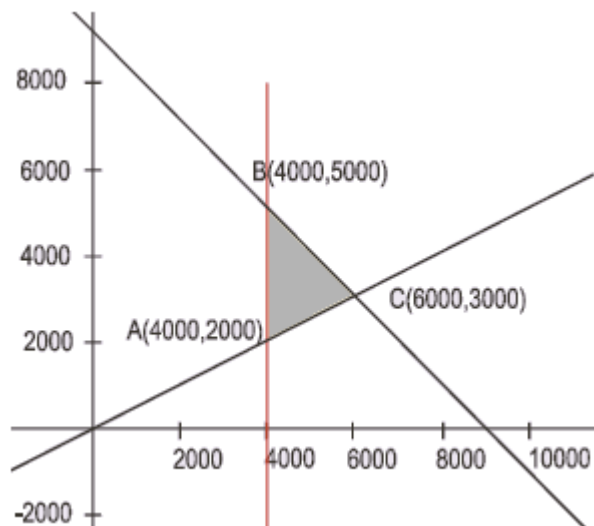
O transporte está sometido ás seguintes restricións:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 9000 & x + y &\leq 9000 \\ x &\geq 4000 & \Rightarrow x &\geq 4000 \\ x &\leq 2y & x - 2y &\leq 0 \end{aligned}$$

A función obxectivo a maximizar será: $F(x, y) = 0,03x + 0,02y$

Represéntase a rexión factible:

Calcúlanse os vértices da rexión factible:



Vértice A: $x - 2y = 0$
 $x = 4000 \Rightarrow y = 2000$; **A (4000, 2000)**

Vértice B: $x + y = 9000$
 $x = 4000 \Rightarrow y = 9000 - 4000 = 5000$;
B (4000, 5000)

Vértice C: $x + y = 9000$ $x + y = 9000$
 $x - 2y = 0 \Rightarrow 1^a F - 2^a \Rightarrow 3y =$
 $9000 \Rightarrow y = 3000$; $x = 6000$; **C(6000, 3000)**

a) A rexión factible é a rexión convexa *ABC* do debuxo.

b) Substitúense os vértices na función obxectivo:

$$F_A(4000, 2000) = 0,03 \cdot 4000 + 0,02 \cdot 2000 = \mathbf{160 \text{ euros}}$$

$$F_B(4000, 5000) = 0,03 \cdot 4000 + 0,02 \cdot 5000 = \mathbf{220 \text{ euros}}$$

$$F_C(6000, 3000) = 0,03 \cdot 6000 + 0,02 \cdot 3000 = \mathbf{240 \text{ euros}}$$

A máxima ganancia obtense se o camión se carga con 6 Tm de mercadorías do tipo *A* e 3 Tm do tipo *B*.

c) A ganancia máxima é de 240 euros.

10. Unha mestura de café está formada por outras dúas, A e B, das que se teñen 500 kg de A e 500 kg de B. Na mestura, o peso de B debe ser menor ou igual que 1,5 veces o de A. Para satisfacer a demanda, a produción debe ser maior ou igual que 600 kg. Sabendo que cada kg de A costa 5 euros e cada kg de B costa 4 euros:

a) Atopa se existe a rexión factible de solucións.

b) Calcula os kg de A e B que deben empregarse para facer unha mestura de custo mínimo, que cumpra os requisitos anteriores.

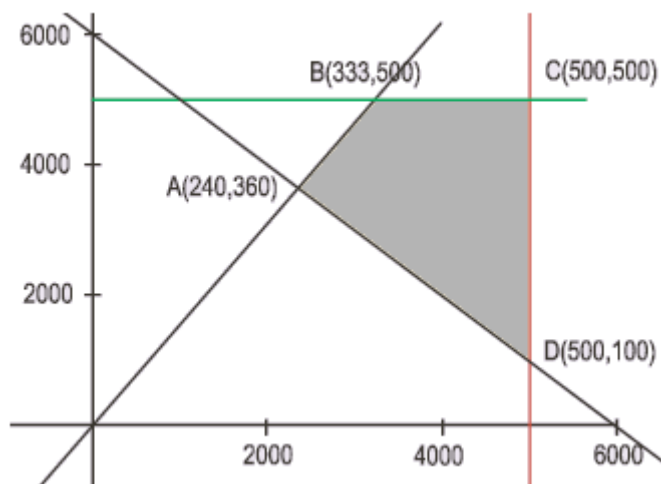
c) Determina o devandito custo mínimo.

Solución:

Sexan x e y o peso de A e o peso de B que forman a mestura.

A mestura está sometida ás restricións seguintes:

$$\begin{array}{ll} y \leq 1,5x & -15x + 10y \leq 0 \\ x + y \geq 600 & x + y \geq 600 \\ x \leq 500 & \Rightarrow x \leq 500 \\ y \leq 500 & y \leq 500 \\ x \geq 0 & x \geq 0 \\ y \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$



A función obxectivo que se minimiza será:

$$F(x, y) = 5x + 4y$$

Representátese a rexión factible.

Calcúlanse os vértices;

C (500, 500) é inmediato.

Vértice **A**: $-15x + 10y = 0$ $-15x + 10y = 0$

$$x + y = 600 \Rightarrow -15x + 15y = 9000$$

Súmanse as dúas ecuacións; $25y = 9000$;

$$y = 360.$$

Substitúese na primeira ecuación; $x = 240$;

A(240, 360).

Vértice **B**: $y = 500$

$$-15x + 10y = 0 \Rightarrow -15x + 10 \cdot 500 = 0 \Rightarrow -15x = -5000 \Rightarrow x = -5000 / -15 \approx 333$$

B(333, 500)

Vértice **D**: $x = 500$

$$x + y = 600 \Rightarrow 500 + y = 600 \Rightarrow y = 100; \text{ **D**(500, 100)}$$

a) A rexión factible é a rexión convexa ABCD do debuxo.

Substitúense os vértices na función obxectivo para ver cando toma o valor mínimo.

$$F_A(240, 360) = 5 \cdot 240 + 4 \cdot 360 = 2640 \text{ euros}$$

$$F_B(333, 500) = 5 \cdot 333 + 4 \cdot 500 = 3665 \text{ euros}$$

$$F_C(500, 500) = 5 \cdot 500 + 4 \cdot 500 = 4500 \text{ euros}$$

$$F_D(500, 100) = 5.500 + 4.100 = 2900 \text{ euros}$$

- b) O custo mínimo da mestura conséguese con **240 kg** da clase **A** e **360 kg** da clase **B**.
c) O seu valor é **2640 euros**.

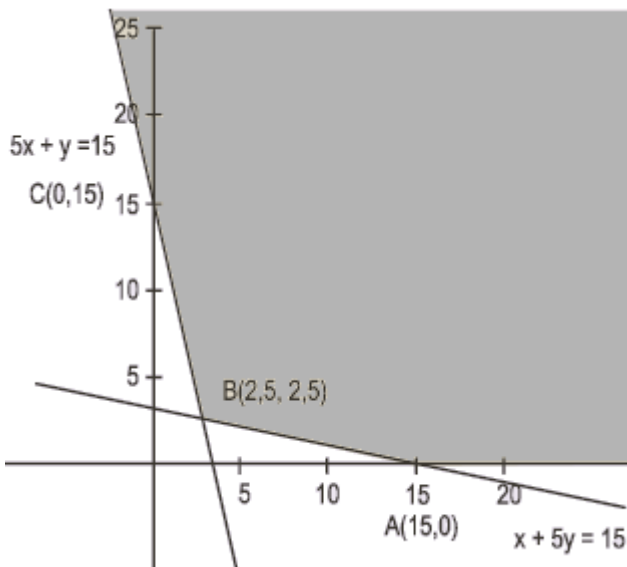
11. Un gandeiro desexa proporcionar ao seu gando unha dieta que conteña un mínimo de 15 unidades de substancia A e outras 15 de substancia B. No mercado só se dispón de dúas clases de compostos: o tipo X cunha unidade de A e cinco de B, e o tipo Y, con cinco unidades de A e unha de B. O prezo do tipo X é de 10 euros e o do tipo Y é de 30 euros. Pregúntase:

- a) Atopa se existe a rexión factible de solucións.
b) Calcula as cantidades que han de comprar de cada tipo para cubrir as necesidades cun custo mínimo.
c) Acha o valor do devandito custo mínimo.

Solución:

Sexan x a cantidade do composto X e y a do Y que se precisan para cumprir a dieta. A dieta está sometida ás seguintes restricións:

$$\begin{aligned} x + 5y &\geq 15 && \text{Para que se tome a substancia A} \\ 5x + y &\geq 15 && \text{Para que tome a substancia B} \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



A función obxectivo que se minimiza será: $F(x, y) = 10x + 30y$

Represéntase a rexión factible.

Calcúlense os vértices da rexión; os vértices **A** (15,0) e **C** (0,15) son inmediatos.

$$\begin{aligned} \text{Vértice B: } x + 5y &= 15 && -5x - 25y = -75 \\ 5x + y &= 15 &\Rightarrow & 5x + y = 15 \end{aligned}$$

Súmanse as dúas ecuacións e resulta
 $-24y = -60$; $y = 2,5$.

Substitúese na primeira ecuación; $x + 12,5 = 15$;
 $x = 2,5$; **B(2,5, 2,5)**.

- a) A rexión factible é a rexión non acoutada **ABC** do debuxo.
b) Substitúense os vértices na función obxectivo:

$$\begin{aligned} F_A(15, 0) &= 10 \cdot 15 + 0 = 150 \text{ euros.} \\ F_B(2,5, 2,5) &= 10 \cdot 2,5 + 30 \cdot 2,5 = \mathbf{100 \text{ euros.}} \\ F_C(0, 15) &= 0 + 30 \cdot 15 = 450 \text{ euros.} \end{aligned}$$

As cantidades que deben comprar para cumprir coa dieta son: **2,5** do composto **X** e **2,5** do composto **Y**.

- c) O custo mínimo da dieta é de 100 euros.

12. Unha familia desexa comprar videoxogos e películas; os videoxogos custan 3 euros e as películas custan 2 euros. Para satisfacer a todos os membros da familia deséxase comprar un mínimo de 4 películas e un máximo de 7; o número de videoxogos debe ser polo menos 4. Tense un presuposto de 36 euros.

- Que combinacións de unidades de cada sistema se poden instalar cumprindo os requirimentos anteriores? Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Poderían comprar 4 películas e 10 videoxogos?
- Se o obxectivo é comprar o maior número de obxectos entre videoxogos e películas, cantos se poden comprar de cada tipo?
- Cal será o custo total?

Solución:

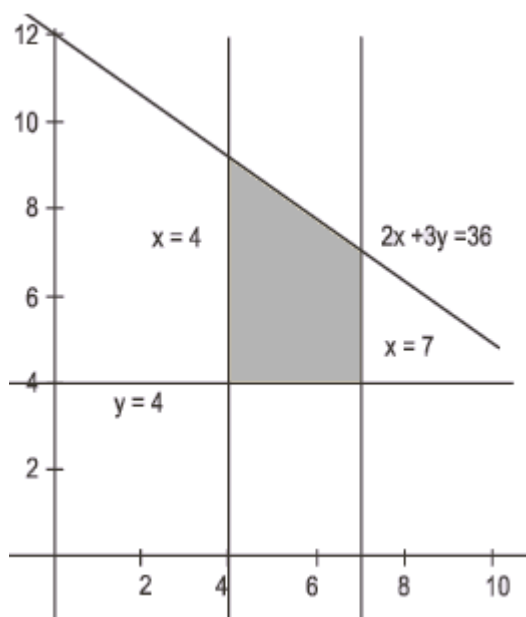
Sexan x a cantidade do películas e y a de videoxogos que poden comprar.

A compra está sometida ás seguintes restricións:

$$\begin{aligned} 4 &\leq x \leq 7 \\ 4 &\leq y \\ 2x + 3y &\leq 36 \end{aligned}$$

A función obxectivo que hai que maximizar é: $F(x, y) = x + y$

O número de películas que poden comprar serán: 4, 5, 6 ou 7.



Catro películas custan 8 euros, quedan para comprar videoxogos 28 euros, cos que poden comprar un máximo de $28/3$; o cociente enteiro é 9; polo tanto, non poden comprar 4 películas e 10 videoxogos.

Sete películas custan 14 euros e quedan $36 - 14 = 22$ euros, cos que poden comprar $22/3$; o cociente enteiro é 7 videoxogos; pódense comprar neste caso.

a) A partir da figura que é un trapecio de área $A = (6+4) \cdot 4/2 = 20$ posibilidades.

Os valores máximos da función obxectivo atoparanse entre os vértices enteiros da figura; estes son **A**(4, 4), **B** (4, 9), **C**(7, 7) e **D**(7, 4).

b) O máximo número de obxectos que se poden comprar serán **7** películas e **7** videoxogos.

c) O custo será $7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = \mathbf{35}$ euros.