

Exercicios de apoio

Exercicio nº 1.-

Calcula os valores de x para que a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique a ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, onde I e O son, respectivamente, as matrices identidade e nula de orde tres.

Solución: $x = 3$

Exercicio nº2.-

Resolve o seguinte sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº3.-

Se I é a matriz identidade de orde 2 e $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula o valor que deben ter x e y para que se cumpra a igualdade $A^2 - xA - yI = 0$.

Solución: $x = 3$, $y = -8$

Exercicio nº 4.-

Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comproba que $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Obtén unha matriz, X , tal que $AX = B$.

Solución

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 5.-

Resolve a ecuación matricial $XA = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº6.-

Obtén a matriz X que verifica $AX + B = 0$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

⁻ e 0 a matriz nula.

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercicio nº 7.-

Os consumos anuais de auga mineral, pan e leite de tres familias veñen expresados na matriz A . A evolución dos prezos dos anos 1997 a 2000 vén reflectida na matriz B .

a) Calcula, se é posible, $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e indica qué información proporciona o produto matricial.

b) ¿Que información nos dá o elemento c_{34} da matriz produto?

$$\begin{array}{c}
 \text{PAN} \quad \text{AUGA} \quad \text{LEITE} \\
 A = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1997 \quad 1998 \quad 1999 \quad 2000 \\
 B = \begin{matrix} \text{PAN} \\ \text{AUGA} \\ \text{LEITE} \end{matrix} \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{c}
 \text{a)} \\
 \cdot \quad A \cdot B = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{matrix} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \\ \begin{pmatrix} 106150 & 111300 & 113250 & 122750 \\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450 \\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500 \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

A matriz $A \cdot B$ danos o gasto anual de cada familia no total dos tres produtos durante os anos 1997 a 2000.

b) O elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde á familia terceira no ano 2000; é decir, indicanos o gasto total desta familia nos tres produtos durante ese ano.

Exercicios resoltos:

Exercicio nº 1.-

Calculamos $A^2 - 6A + 9I$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow x = 3$$

Por tanto, o único valor de x que fai que se verifique a igualdade proposta é $x = 3$.

Exercicio nº 2.-

Chamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, o sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 3X - 2X = A \\ 2X + X = B \end{array} \right\} X = B - 2X$$

$$3X - 2(B - 2X) = A \rightarrow 3X - 2B + 4X = A \rightarrow 7X = A + 2B \rightarrow X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

$$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{7}(A+2B) = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}(3B-2A) = \frac{1}{7} \left[3 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 3.-

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, temos que ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = -2-2x = -2-6 = -8 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow y = -5-x = -5-3 = -8 \end{array}$$

Por tanto: $x = 3$, $y = -8$

Exercicio nº 4.-

- a) Trátase de probar que $A A^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade de orden 3. Efectuamolo produto.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\
 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

- b) Despexamos X na igualdade $AX = B$, multiplicando pola esquerda por A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Polo apartado a), coñecemos A^{-1} ; logo:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 5.-

Despexamos X Multiplicando por A^{-1} pola dereita

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

Hachamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 6.-

Despexamos X :

$$AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \rightarrow IX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$$

Calculamos a inversa de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Intercambiamos as filas 2^a y 3^a .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a - 2 \cdot 2^a}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a + 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$X = - \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 26 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 35 \\ -26 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 7.-

- a) A matriz A é 3×3 e a B é 3×4 . Para poder efectuar o produto de dúas matrices, o número de columnas da primeira debe coincidir co número de filas da segunda.

Por tanto, o produto $B \cdot A$ non se pode facer, pero o $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{matrix} =$$

A matriz $A \cdot B$ danos o gasto anual de cada familia no total dos tres produtos durante os anos 1997 a 2000.

- b) O elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde á familia terceira no ano 2000; é decir, nos indica o gasto total desta familia nos tres produtos durante ese ano.