

Unidade 1. Sistemas de ecuaciones lineais

1. Ecuacións lineais con dúas incógnitas

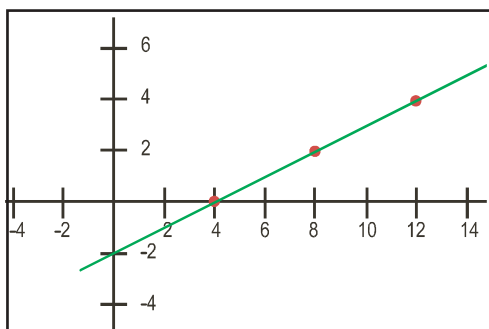
Unha ecuación lineal con dúas incógnitas é da forma $ax + by = c$; onde a , b e c son números reais; x e y son as incógnitas.

Chámase solución de ecuación lineal a pares de valores (a, b) pertencentes a \mathbb{R}^2 que ao substituílos na ecuación convértena nunha igualdade numérica verdadeira.

O conxunto de todas as solucións dunha ecuación lineal son os puntos dunha recta do plano.

Exemplo

1. Dada a ecuación lineal $x - 2y = 4$; comproba que os pares $(4, 0)$; $(8, 2)$ y $(12, 4)$ son algunhas das súas solucións; debuxa a recta que pasa polas devanditas solucións.



Solución:

$$4 - 2 \cdot 0 = 4; 4 - 0 = 4; 4 = 4$$

$$8 - 2 \cdot 2 = 4; 8 - 4 = 4; 4 = 4$$

$$12 - 2 \cdot 4 = 4; 12 - 8 = 4; 4 = 4$$

A solución xeral: $x - 2y = 4$; $x = 4 + 2y$.

Substitúese y por λ (λ é un parámetro); a solución xeral escríbese $(4 + 2\lambda, \lambda)$; para cada valor que asignemos ao parámetro λ obtense unha solución particular.

2. Sistemas de dúas ecuacións con dúas incógnitas

Chámanse **sistemas lineais de dúas ecuacións con dúas incógnitas** ao conxunto formado por dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas; é dicir:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Chámase solución de sistema ao par de valores (α, β) que cumpren as dúas ecuacións.

Resolver un sistema é atopar as súas solucións ou demostrar que non ten solución.

Exemplo

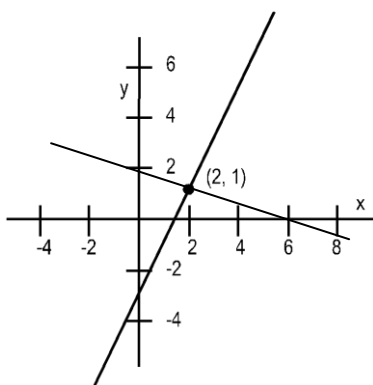
2. Resolve os sistemas: a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$

Solución:

a) Aplícase o método de redución; neste caso, substitúese a segunda ecuación do sistema pola que resulta de sumar á primeira a segunda multiplicada por menos dous.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -2x - 6y = -10 \\ \hline 0x - 7y = -7 \end{array} \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -7y = -7 \end{cases} : \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} ; \text{solución}(2,1)$$

Solución gráfica:



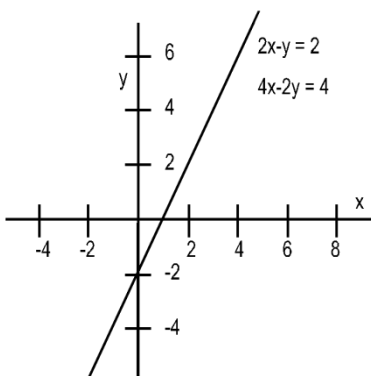
As dúas rectas córtanse no punto (2,1) e esta é a solución.

b) Substitúese a segunda ecuación do sistema pola que resulta de sumarlle a esta a primeira multiplicada por menos dous.

$$\begin{array}{r} -4x + y = -4 \\ 4x - 2y = 4 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} \quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

A segunda ecuación ten infinitas solucións, logo o sistema ten infinitas solucións.

Solución gráfica: as dúas rectas coinciden e o sistema ten por solución os puntos da recta común; é dicir, infinitos.



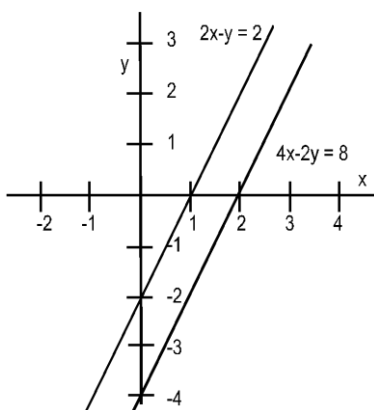
c) Substitúese a segunda ecuación do sistema, pola que resulta de sumarlle á primeira multiplicada por menos dous a segunda.

$$\begin{array}{r} -4x + y = -4 \\ 4x + 2y = 8 \\ \hline 0x + 0y = 4 \end{array} \quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 0y = 4 \end{cases}$$

A segunda ecuación non ten solución; logo o sistema non ten solución.

Solución gráfica:

As rectas son paralelas, non teñen ningún punto común; polo que o sistema non ten solución.



O estudo destes tres sistemas permite clasificar os sistemas lineais en:

- **Compatibles** se teñen solución.
- Se a solución é única dise **determinado**.
- Se as solucións son infinitas dise **indeterminado**.
- **Incompatibles** se non teñen solución.

3. Sistemas equivalentes

Os sistemas:
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Teñen por solución única (2, 1); dicimos que son equivalentes.

En xeral, **sistemas equivalentes** son aqueles que tendo o mesmo número de incógnitas (o número de ecuacións pode ser distinto) teñen a mesma solución.

As seguintes transformacións realizadas sobre un sistema dan lugar a sistemas equivalentes.

a) Cambiar a orde das ecuacións.

Exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ son equivalentes; ambos os dous teñen por solución $x=3$ e $y=2$

b) Multiplicar os dous membros dunha ecuación por un número distinto de cero.

Exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ e $\begin{cases} \lambda(2x - y) = \lambda 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ con $\lambda \neq 0$ son equivalentes

c) Substituír unha ecuación pola súa suma con outras ecuacións multiplicadas por números distintos de cero.

Exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ (x + 3y) + 3(2x - y) = 9 + 3 \cdot 4 \end{cases}$

son equivalentes, opérase na segunda ecuación do segundo sistema e obtense,

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 7x = 21 \end{cases} \quad \text{é un sistema máis sinxelo que o primeiro.}$$

d) Suprimir unha das ecuacións do sistema que sexa combinación lineal doutras ecuacións do sistema.

Exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ son equivalentes, o segundo

sistema resulta de suprimir a terceira ecuación do primeiro, que é suma das outras dúas.

4. Sistemas de ecuacións lineais: notacións

Un **sistema lineal de m ecuacións con n incógnitas** escríbese da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Aos números reais a_{ij} chamámoslos coeficientes do sistema; aos b_j termos independentes e ás x_j incógnitas do sistema.

Chámase solución de sistema a valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ das incógnitas que converten as ecuacións en identidades numéricas.

Resolver un sistema é atopar as súas solucións ou demostrar que non ten solución.

Clases de sistemas lineais

Os sistemas de ecuacións lineais atendendo aos termos independentes chámanse:

- **Homoxéneos**, cando os termos independentes b_i son todos ceros.
- **Non homoxéneos**, se algún dos termos independentes b_i son distintos de cero.

Segundo as solucións, como vimos para os de dúas ecuacións, os sistemas poden ser:

- **Incompatibles**, se non teñen solución.
- **Compatibles**, se teñen solución.
- **Determinado**, se unicamente ten unha solución.
- **Indeterminado**, se ten infinitas solucións.

5. Resolución de sistemas de tres ecuacións método de Gauss

O **método de Gauss** permite (baseándose no método de redución) tratar sistemas de calquera número de ecuacións e de incógnitas, descubrir se son compatibles e, neste caso, resolvelos.

A combinación axeitada das transformacións **a)**, **b)**, **c)** e **d)** aplicadas a un sistema, permiten obter un sistema graduado equivalente ao inicial, que facilita a clasificación e solución, se é o caso, do sistema obxecto de estudo.

Un **sistema graduado de tres ecuacións con tres incógnitas** ten a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1 + } a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \phantom{a_{11}x_1 + } \phantom{a_{22}x_2 + } a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Os exemplos seguintes aclararán os pasos a seguir para transformar sistemas en sistemas graduados equivalentes; sobre estes estúdanse os sistemas iniciais e no seu caso resólvense.

Exemplos

3. Resolve o seguinte sistema graduado:
$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3y - 2z = 0 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

Solución:

Despéxase z na terceira ecuación $z = \frac{9}{3} = 3$

Substitúese o valor de z na segunda ecuación e despéxase y ;

$$3y - 2 \cdot 3 = 0 ; \quad 3y = 6 ; \quad y = \frac{6}{3} = 2$$

finalmente substitúense os valores de z e y na primeira ecuación e despéxase x :

$$x + 2 - 3 = -1 ; \quad x = -1 - 2 + 3 ; \quad x = 0$$

A solución do sistema será: $(0, 2, 3)$.

4. Transforma o sistema seguinte nun sistema equivalente graduado, clasifícao e, no seu caso, resólveo:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$$

Solución:

Primeiro paso.

Anúlase o coeficiente de x nas dúas últimas ecuacións, para o que se realizan as dúas transformacións seguintes: Substitúese a segunda ecuación, pola que resulta ao sumar á segunda actual, a primeira multiplicada por menos dous:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ \hline 0x - 1y + 8z = 6 \end{array}$$

Substitúese a terceira ecuación pola que resulta ao sumar á terceira actual, a primeira multiplicada por menos cinco:

$$\begin{array}{r} -5x + 5y + 10z = 5 \\ 5x - y + 3z = 16 \\ \hline 0x + 4y + 13z = 21 \end{array}$$

Co que resulta o sistema equivalente seguinte:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 0x - y + 8z = 6 \\ 0x + 4y + 13z = 21 \end{cases}$$

Segundo paso.

Anúlase o coeficiente de y na terceira ecuación, para o que se realiza a transformación seguinte:

Substitúese a terceira ecuación pola que resulta ao sumar á terceira actual, a segunda multiplicada por catro.

$$\begin{array}{r} -4y + 32z = 24 \\ 4y + 13z = 21 \\ \hline 0y + 45z = 45 \end{array}$$

Con isto conseguíuse o sistema graduado seguinte:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 0x - y + 8z = 6 \\ 0x + 0y + 45z = 45 \end{cases}$$

A terceira ecuación ten solución, resólvese doadamente e permite afirmar que o sistema

é **compatible, determinado** ; polo tanto, de solución única $z = \frac{45}{45} = 1$; $-y + 8 = 6$;

$y = 2$; $x - 2 - 2 = -1$; $x = 3$. A solución exprésase así $(x,y,z) = (3,2,1)$

O nome proposto ás variables no sistema non é fundamental para a súa solución; polo tanto, podemos prescindir do nome das variables e operar cos seus coeficientes dispoñendoos en forma rectangular como se indica a continuación.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

A esta disposición rectangular dos coeficientes chámasele **matriz ampliada asociada ao sistema**. Sobre esta matriz, aplícanse doadamente os pasos, para transformala na matriz ampliada, asociada ao sistema graduado equivalente ao dado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-5) + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{\text{a}} \text{ fila por } 4 + 3^{\text{a}} \text{ fila}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é a matriz asociada ao sistema graduado:
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 0x - y + 8z = 6 \\ 0x + 0y + 45z = 45 \end{cases}$$

Exemplos

5. Transforma o sistema seguinte nun sistema equivalente graduado, clasifícao e, no seu caso, resólveo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

Solución:

Primeiro paso.

Anúlase o coeficiente de x nas dúas últimas ecuacións, para o que se realizan as dúas transformacións seguintes:

Substitúese a segunda ecuación, pola que resulta ao sumar á segunda actual, a primeira multiplicada por menos dous:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y - 6z = -8 \\ 2x - y - z = 6 \\ \hline 0x + y - 7z = -2 \end{array}$$

Substitúese a terceira ecuación, pola que resulta ao sumar á terceira actual, a primeira multiplicada por menos tres:

$$\begin{array}{r} -3x + 3y - 9z = -12 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \\ \hline 0x + y - 7z = -2 \end{array}$$

Co que resulta o sistema equivalente seguinte:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 0x + y - 7z = -2 \\ 0x + y - 7z = -2 \end{cases}$$

Segundo paso.

Anúlase o coeficiente de y na terceira ecuación, para o que se realiza a transformación seguinte:

Substitúese a terceira ecuación pola que resulta ao sumar á terceira actual a segunda multiplicada por menos un:

$$\begin{array}{r} -y + 7z = 2 \\ y - 7z = -2 \\ \hline 0y + 0z = 0 \end{array}$$

Con isto conseguiuuse o sistema graduado seguinte:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 0x + y - 7z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

A terceira ecuación é $0z = 0$. Calquera valor de z cumpre a ecuación, polo que ten infinitas solucións, que serán as infinitas solucións do sistema; trátase dun sistema **compatible, indeterminado**.

O sistema que resulta é

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \end{cases}$$

Tómase z como parámetro: $z = \lambda$

Substitúese na segunda ecuación: $y = -2 + 7\lambda$.

Substitúense os valores anteriores na primeira ecuación: $x = 4 + y - 3z = 4 - 2 + 7\lambda - 3\lambda = 2 + 4\lambda$

A solución será: $(x, y, z) = (2 + 4\lambda, -2 + 7\lambda, \lambda)$

Trátase dun sistema **compatible, indeterminado uniparamétrico**

. Utilizando a notación matricial os pasos serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-3) + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^{\text{a}} \text{ fila menos } 2^{\text{a}} \text{ fila}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz asociada ao sistema triangular:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 0x + y - 7z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

6. Transforma o sistema seguinte nun sistema equivalente graduado, clasifícao e, no seu caso, resólveo:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Primeiro paso. Cámbiase a orde das ecuacións (colócase a terceira en primeiro lugar); isto facilita os cálculos:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \end{cases}$$

Segundo paso. Anúlense os coeficientes de x nas dúas últimas ecuacións, para o que se realizan as dúas transformacións seguintes:

Substitúese a segunda ecuación pola que resulta ao sumar á segunda actual a primeira multiplicada por menos dous:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y - 2z = -6 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ \hline 0x + 1y + 1z = 0 \end{array}$$

Substitúese a terceira ecuación pola que resulta ao sumar á terceira actual a primeira multiplicada por menos catro:

$$\begin{array}{r} -4x + 4y - 4z = -12 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ \hline 0x + 2y + 2z = -3 \end{array}$$

Co que resulta o sistema equivalente seguinte:
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 0x + y + z = 0 \\ 0x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

Terceiro paso. Anúlase o coeficiente de y na terceira ecuación, para o que se realiza a transformación seguinte:

Substitúese a terceira ecuación pola que resulta de sumar á terceira actual a segunda ecuación multiplicada por menos dous:

$$\begin{array}{r} -2y - 2z = 0 \\ 2y + 2z = -3 \\ \hline 0y + 0z = -3 \end{array}$$

Con esta conseguiuase o sistema graduado seguinte:
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 0x + y + z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

A terceira ecuación $0z = -3$ non ten solución, calquera número por cero dá cero. Trátase dun sistema **incompatible**.

Utilizando a notación matricial os pasos serían:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (3^{\text{a}} \text{ ecuación como } 1^{\text{a}}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-4) + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (2^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 3^{\text{a}} \text{ fila}) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz asociada ao sistema triangular $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 0x + y + z = 0 \\ 0x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$

Discusión dun sistema polo método de Gauss:

Sexa un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas:

Se ao reduci-lo á forma triangular graduada aparece algunha ecuación do tipo $0z = b$ con $b \neq 0$, o sistema é **incompatible**.

Se non sucede o anterior, o sistema é **compatible**.

Se o número de ecuacións non triviais (é dicir, unha vez eliminadas as da forma $0 = 0$, se as houbese) fose tres, igual ao número de incógnitas, o sistema ten solución única.

Sistema **compatible, determinado**.

Se o número de ecuacións é menor que o de incógnitas, o sistema ten infinitas solucións, o sistema é **compatible, indeterminado**; o número de parámetros do que dependen as solucións é igual ao número de incógnitas menos o de ecuacións.

Exemplos

7. Discute e resolve, no seu caso, o sistema seguinte: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$

Solución:

Pártese da matriz asociada ao sistema e opérase para conseguir unha matriz graduada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila} + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ esta é a matriz asociada ao sistema triangular: } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y - z = 4 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

A terceira ecuación ten solución única, polo tanto o sistema é **compatible, determinado**.

Da terceira ecuación, $z = \frac{0}{2} = 0$ substitúese na segunda, $-y - 0 = 4$, $y = -4$ e por último trabállase coa primeira ecuación; $x + 2 \cdot 4 + 0 = 3$; $x = -5$.

A solución é: $(x, y, z) = (-5, -4, 0)$

8. Discute e resolve no seu caso o sistema seguinte:
$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ -x + 3y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Solución

Esríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1^{\text{a}} \text{ fila} + 2^{\text{a}} \text{ fila}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz asociada ao sistema:
$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 4y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

Na segunda ecuación pódese despexar z , posto que é a que ten como coeficiente menos un, co que as variables y e t toman como parámetros: O sistema é **compatible, indeterminado e biparamétrico**. Faise $y = \lambda$ e $t = \mu$; substitúense estes parámetros nas ecuacións e obtéñense as solucións.

Da segunda ecuación $4\lambda - z + 3\mu = 0$; $z = 4\lambda + 3\mu$; substitúense os valores na primeira ecuación

$$x + \lambda - 4\lambda - 3\mu + \mu = 0; \quad x = 3\lambda + 2\mu.$$

A solución será: $(x, y, z, t) = (3\lambda + 2\mu, \lambda, 4\lambda + 3\mu, \mu)$.

6. Sistemas homoxéneos

Recorda que un sistema é homoxéneo se todos os termos independentes son cero.

A expresión dun sistema homoxéneo de m ecuacións con n incógnitas será:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots + \dots + \dots + \dots = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Os sistemas homoxéneos teñen a particularidade de que todos son compatibles, pois polo menos teñen como solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, chamada impropia ou trivial

Polo tanto, ao **discutir por Gauss un sistema homoxéneo** de tres incógnitas pódense presentar os casos seguintes:

- Se o número de ecuacións non triviais (é dicir, unha vez eliminadas as da forma $0=0$ se as houbese) fose igual ao número de incógnitas, o sistema ten solución única; polo tanto a trivial $(0, 0, \dots, 0)$. Sistema **compatible, determinado**.
- Se o número de ecuacións é menor que o de incógnitas, o sistema ten infinitas solucións, o sistema é **compatible, indeterminado**; o número de parámetros é igual ao número de incógnitas menos o de ecuacións.

Exemplo

9. Transforma o sistema homoxéneo seguinte nun sistema equivalente graduado, clasifícao e, no seu caso, resólveo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

Solución: Pártese da matriz asociada ao sistema e opérase para conseguir una matriz graduada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-2) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila} + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (2^{\text{a}} \text{ fila} + 3^{\text{a}} \text{ fila}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ esta é a matriz asociada ao sistema triangular: } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -6y + 4z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Como o número de ecuacións non triviais é dous, menor que o número de incógnitas, o sistema é compatible, indeterminado.

Da segunda ecuación; $-6y + 4z = 0 \Rightarrow -6y = -4z \Rightarrow y = \frac{-4z}{-6} = \frac{2z}{3}$; para evitar que as solución se expresen como fraccións expresamos z como produto de 3 polo parámetro λ ; isto é

$$z = 3\lambda \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 3\lambda}{3} = 2\lambda; \quad x + 2\lambda - 3\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$$

A solución do sistema é: $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$

7. Sistemas con parámetros

Se nun sistema algúns dos coeficientes das incógnitas ou termos independentes se expresan mediante letras ou **parámetros**, que poden tomar valores reais, atopámonos en realidade ante o estudo de infinitos sistemas, un por cada valor do parámetro.

Por exemplo, o sistema
$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k-1 \end{cases}$$

Ten como parámetro k e para cada valor que se asigne a k obtense un sistema. Nestes casos trátase de estudar a compatibilidade ou non de cada un dos sistemas que se obteñen ao substituír o parámetro por un valor numérico.

Exemplo

10. Discute o seguinte sistema para os distintos valores de k e resólveo cando sexa posible.

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k-1 \end{cases}$$

Solución: Pártese da matriz asociada ao sistema e opérase para conseguir unha matriz graduada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-k) + 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-1) + 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k-2 \end{pmatrix}$$

esta é a matriz asociada ao sistema graduado:
$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ -y + (1-k^2)z = 0 \\ (1-k)z = k-2 \end{cases}$$

Se na terceira ecuación o coeficiente de z fose cero; isto é, $1-k=0$; é dicir, $k=1$ queda $0z=-1$, o sistema é incompatible.

Para o resto dos valores de k ; é dicir, $k \neq 1$, o sistema é compatible e, como coinciden o número de ecuacións e de incógnitas, determinado.

A solución sería: da terceira ecuación, $z = \frac{k-2}{1-k}$; da segunda ecuación, $-y + (1-k^2)\frac{k-2}{1-k} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y + (1+k)(k-2)=0 \Rightarrow y=(1+k)(k-2)$; finalmente, da primeira ecuación,

$$x + (1+k)(k-2) + k \frac{k-2}{1-k} = 1 \Rightarrow x + \frac{(1-k^2)(k-2) + k^2 - 2k}{1-k} = 1 \Rightarrow$$

$$x + \frac{k-k^3-2+2k^2+k^2-2k}{1-k} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{(-2-k+3k^2-k^3)}{1-k} = \frac{1-k+2+k-3k^2+k^3}{1-k} = \frac{3-3k^2+k^3}{1-k}.$$

8. Problemas que se resollen formulando sistemas de ecuacións lineais

A linguaxe alxébrica, como xa sabemos, é unha potente ferramenta para **resolver problemas**; neste apartado trataremos a resolución de problemas que precisan dos sistemas lineais estudados.

Recorda que para resolver un problema mediante álgebra deben seguirse os pasos seguintes.

Lectura comprensiva do problema. Require facerse cargo da situación que o problema presenta mediante lectura comprensiva.

Elección de incógnitas. Unha das cuestións que deben quedar claras da lectura son os valores que o problema nos solicita, eses valores serán as incógnitas do problema. Elixir o mínimo número de incógnitas, tendo en conta que algúns valores solicitados adoitan ter relacións sinxelas.

Formulación. Consiste en traducir o enunciado escrito nun sistema de ecuacións; para iso teranse en conta as relación entre as incógnitas elixidas que o enunciado do problema nos indica.

Resolución. Paso no que se resolve o sistema formulado.

Discusión. Compróbase que a solución obtida ao resolver o sistema cumpre as súas ecuacións e que son válidas para as condicións impostas no enunciado.

Exemplos

11. Unha multinacional de seguros ten delegacións en Madrid, Barcelona e Valencia. O número total de altos executivos das tres delegacións ascende a 31. Para que o número de altos executivos da delegación de Barcelona fose igual ao de Madrid, terían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Ademais, o número dos de Madrid excede nun á suma dos destinados nas outras dúas cidades. Cantos altos executivos están destinados en cada cidade?

Solución: Sexan x , y , z os altos executivos de Madrid, Barcelona e Valencia.

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - 3 = y + 3 \\ x - 1 = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - y = 6 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Matriz asociada ao sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

O sistema triangular asociado á matriz será:
$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ -2y - z = -25 \\ -z = -5 \end{cases}$$

A solución será: $z = 5$; $-2y - 5 = -25$; $-2y = -20$; $y = 10$; $x + 10 + 5 = 31$; $x = 16$.

Polo que os executivos da multinacional son: 16 en Madrid; 10 en Barcelona e 5 en Valencia.

12. Un hipermercado inicia unha campaña de ofertas. Na primeira delas desconta un 4% en certo produto A, un 6% no produto B e un 5% no produto C. Ás dúas semanas pon en marcha a segunda oferta descontando un 8% sobre o prezo inicial de A, un 10% sobre o prezo inicial de B e un 6% sobre o prezo inicial de C.

Sábese que se un cliente compra durante a primeira oferta un produto A, dous B e tres C, aforra 16 euros respecto do prezo inicial. Se compra tres produtos A, un B e cinco C na segunda oferta, o aforro é de 29 euros.

Se compra un produto A, un B e un C, sen ningún tipo de desconto, debe aboar 135 euros. Calcúlese o prezo de cada produto antes das ofertas.

Solución: Sexan x , y , z os prezos dos produtos A, B e C antes da oferta.

$$\begin{cases} x + y + z = 135 \\ 0,96x + 0,94 \cdot 2y + 0,95 \cdot 3z = (135 + y + 2z) - 16 \\ 0,92 \cdot 3x + 0,90y + 0,94 \cdot 5z = (135 + 2x + 4z) - 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 135 \\ 0,96x + 0,88y + 0,85z = 119 \\ 0,76x + 0,90y + 0,70z = 106 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 135 \\ 96x + 88y + 85z = 11900 \\ 76x + 90y + 70z = 10600 \end{cases}$$

Matriz asociada ao sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 96 & 88 & 85 & 11900 \\ 76 & 90 & 70 & 10600 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-96) \text{ mais } 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila por } (-76) \text{ mais } 3^{\text{a}} \text{ fila} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 14 & -6 & 340 \end{pmatrix}$$

$$(2^{\text{a}} \text{ fila por } 14 + 3^{\text{a}} \text{ fila por } 8) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 0 & -202 & -12120 \end{pmatrix} \text{ esta é a matriz asociada}$$

ao sistema triangular
$$\begin{cases} x + y + z = 135 \\ -8y - 11z = -1060 \\ -202z = 12120 \end{cases}$$

$$\text{A solución será: } z = \frac{-12120}{-202} = 60 \Rightarrow -8y - 11 \cdot 60 = -1060 \Rightarrow -8y = -400 \Rightarrow y = \frac{-400}{-8} = 50$$

$$\Rightarrow x + 50 + 60 = 135 \Rightarrow x = 135 - 110 \Rightarrow x = 25.$$

Os prezos iniciais serán: A = 25 euros; B = 50 euros e C = 60 euros.

13. Unha empresa desexa dispoñer de diñeiro en efectivo en euros, dólares e libras esterlinas. O valor total entre as tres moedas ha de ser igual a 264.000 euros. Quérese que o valor do diñeiro dispoñible en euros sexa o dobre do valor do diñeiro en dólares, e que o valor do diñeiro en libras esterlinas sexa a décima parte do valor do diñeiro en euros. Se se supón que unha libra esterlina é igual a 1,5 euros e un dólar é igual a 1,1 euros, pídese determinar a cantidade de euros, dólares e libras esterlinas que a empresa ha de ter dispoñible.

Solución: Sexan x , y , z respectivamente os euros, dólares e libras esterlinas o diñeiro que a empresa desexa dispoñer.

$$\begin{cases} x + 1,1y + 1,5z = 264000 \\ x = 2(1,1y) \\ \frac{x}{10} = 1,5z \end{cases};$$

resólvese o sistema formulado, polo método máis sinxelo.

$$\begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \\ x - 15z = 0 \end{cases}; \text{ sumar 1ª ecuación e terceira } \begin{cases} 11x + 11y = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \end{cases}$$

súmase a primeira ecuación multiplicada por dous máis a segunda;

$$32x = 5280000 \Rightarrow x = \frac{5280000}{32} = 165000; y = \frac{10x}{22} = \frac{1650000}{22} = 75000; z = \frac{x}{15} = \frac{165000}{15} = 11000$$

A empresa dispón de 165000 euros; 75000 dólares e 11000 libras esterlinas.