

10 Probabilidade

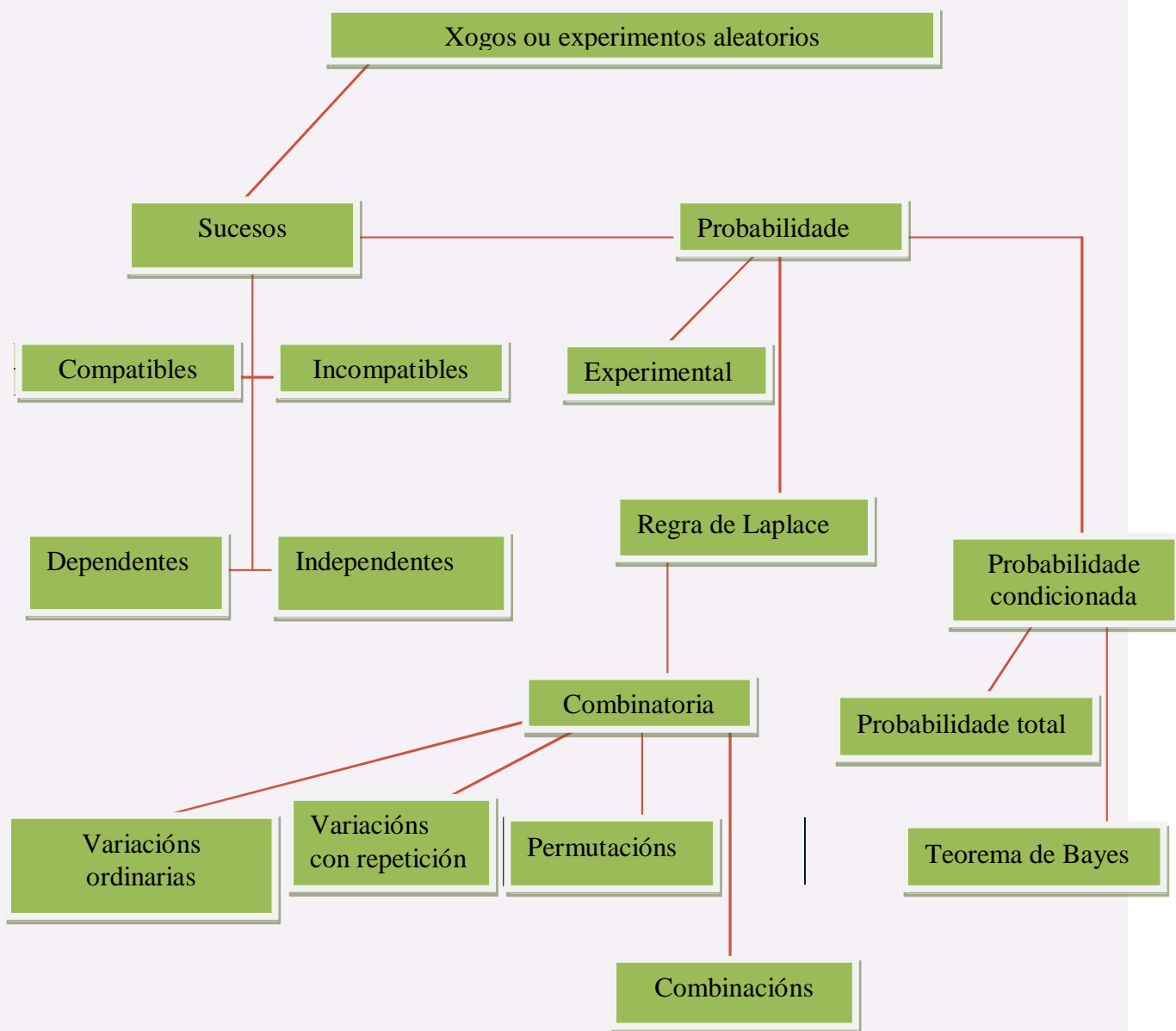
A orixe do estudo da probabilidade atópase nos xogos de azar. Os primeiros problemas foron formulados por xogadores. O Grande Duque de Toscana mostrou no século XVI a súa sorpresa ao advertir que ao tirar tres dados se obtiña con máis frecuencia 10 que 9 puntos, cando ambas as dúas cifras, 10 e 9, se descompoñían, segundo el, de 6 maneiras diferentes. O problema do gran duque foi resolto por Galileo.

Outro problema famoso formulado a mediados de século XVII polo cabaleiro da Meré, un cortesán francés, a Blaise Pascal, deu lugar a unha relación epistolar entre o xurista e matemático Pierre de Fermat e o propio Pascal na que se fixaron os fundamentos do cálculo de probabilidades.

O estudo de probabilidade alcanzou un grande desenvolvemento, durante o século XIX, da man dos físicos Maxwell, Boltzman e Gibbs, creadores do que se coñece como Mecánica Estatística, na que asignan probabilidades aos estados das moléculas dun gas contido nun recipiente. Estes estudos conduciron a James Clark

Maxwell (1831 -1906) a afirmar que a verdadeira lóxica do mundo está no cálculo de probabilidades. Sen ánimo de ir tan lonxe, nesta Unidade didáctica só nos cinguiremos ao estudo da probabilidade en xogos ou experimentos aleatorios sinxelos. Tamén introduciremos o concepto de probabilidade condicionada e sucesos independentes, útiles importantes para resolución de moitos problemas de probabilidade. A Unidade remata co estudo da probabilidade total e o teorema de Bayes. Este último é un intento de cuantificar en que grao varias causas contribúen á aparición dun efecto. Deixamos, a xeito de apéndice, dous apartados ao final para resolver algúns dos problemas de probabilidade con axuda da combinatoria.

1. ESPAZO MOSTRAL, SUCESOS E OPERACIÓNS CON SUCESOS. PROPIEDADES.	2
2. DEFINICIÓ DE PROBABILIDADE DUN SUCESO.	4
2.1. Propiedades da probabilidade dun suceso.	4
2.2. Asignación de probabilidades pola frecuencia relativa.	6
2.3. Asignación de probabilidades en experimentos aleatorios con resultados equiprobables. Regra de Laplace.	7
3. DIAGRAMAS EN ÁRBORE E RESOLUCIÓN DALGÚNS PROBLEMAS SINXELOS DE PROBABILIDADE.	8
3.1. Principio de multiplicación e diagramas en árbore.	8
3.2. Diagramas en árbore e problemas de probabilidade.	9
4. PROBABILIDADE condicionada.	11
5. SUCESOS INDEPENDENTES.	12
Sucesos independentes en probas independentes.	13
6. PROBABILIDADE condicionada E PROBABILIDADE TOTAL.	14
6.1. Probabilidade condicionada e diagramas en árbore.	14
6.2. Probabilidade total.	16
7. TEOREMA DE BAYES.	18
8. ANEXO COMBINATORIA.	21



1. Espazo mostral, sucesos e operacións con sucesos. Propiedades

Sabemos, vímolos o curso pasado, que un experimento aleatorio se caracteriza pola imposibilidade de prever o resultado a pesar de que se realice sempre nas mesmas condicións. Recordamos, no cadro seguinte, a terminoloxía básica en torno ao experimento aleatorio de tirar un dado unha única vez (unha única proba).

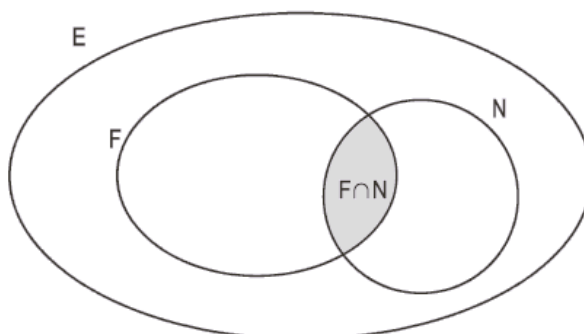
Concepto	Significado	Exemplo
Espazo mostral	Conxunto de todos os resultados posibles dun experimento aleatorio.	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Suceso	Cada un dos subconxuntos do espazo mostral.	$A = \{\text{sacar número par}\} = \{2, 4, 6\}$
Suceso elemental	Suceso constituído por un único resultado.	$C = \{\text{sacar o número 3}\} = \{3\}$
Suceso seguro	Suceso constituído por todos os resultados da proba.	$E = \{\text{sacar número menor que 7}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Suceso imposible	Suceso que non se realiza nunca; é o suceso que non contén resultado ningún.	$D = \{\text{sacar un número maior que 7}\} = \Phi$ O suceso imposible simbolízase por Φ
Intersección de sucesos	Suceso constituído polo conxunto de resultados comúns a A e a B.	$A = \{\text{sacar número par}\} = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{\text{sacar número maior que 4}\} = \{5, 6\}$ $A \cap B = \{\text{número par e maior que 4}\} = \{6\}$
Unión de sucesos	Suceso constituído por sucesos elementais de A ou de B.	$A \cup B = \{\text{número par ou maior que 4}\} = \{2, 4, 5, 6\}$
Sucesos incompatibles	Sucesos cuxa realización simultánea é imposible, é dicir, a súa intersección é o suceso imposible.	$A = \{\text{sacar número par}\}$ e $C = \{3\}$, entón $A \cap C = \Phi$
Sucesos contrarios ou complementarios	Son dous sucesos incompatibles cuxa unión é o suceso seguro.	$A = \{\text{sacar número par}\}$ e $\bar{A} = \{\text{sacar número impar}\}$ $A \cap \bar{A} = \Phi$ e $A \cup \bar{A} = E$. É evidente que todos os elementos de \bar{A} son os elementos de E que non pertencen a A. Os sucesos E e Φ son complementarios, xa que $\Phi \cap E = \Phi$ e $\Phi \cup E = E$.

O "ou" que aparece na definición da unión de sucesos non é un "ou exclusivo", senón un "ou inclusivo" como se ve nalgúns escritos "ou/e".

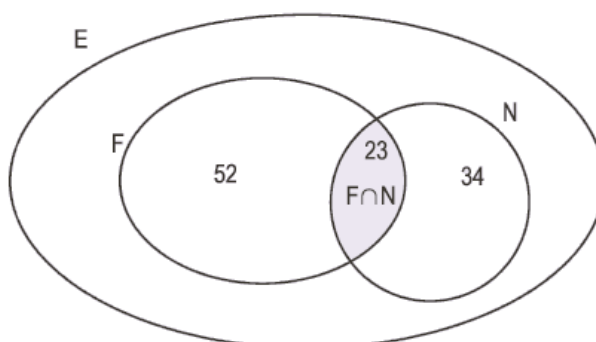
Exemplo

1. Nun campamento de verán practícanse dous deportes: fútbol e natación. Dos 120 novos inscritos 75 apuntáronse a fútbol, 57 a natación e 23 apuntáronse a ambos os dous deportes. Cantos ignoraron o fútbol? Cantos desbotaron a natación? Cantos practican o fútbol pero non a natación? Cantos practican a natación pero non o fútbol? Cantos mozos se inscribiron en fútbol ou natación? Cantos non se apuntaron a fútbol nin a natación?

Solución: Adóitanse representar estes datos por diagramas, chamados diagramas de Venn. O conxunto E representa o total de novos. Dentro debuxamos dous óvalos, F e N , que corresponden aos mozos que practican fútbol e natación respectivamente.



A parte común a F e N simboliza os mozos que se apuntaron a fútbol e natación, é dicir, $F \cap N$. Os que ignoraron o fútbol pertencen ao conxunto F' e son $120 - 75 = 45$. Os que non escolleron natación constitúen o conxunto expresado por N' e son $120 - 57 = 63$.



Os que practican fútbol e non natación, é dicir, o conxunto $F \cap N'$, está constituído por $75 - 23 = 52$, mentres que os que practican natación e non fútbol, os do conxunto $N \cap F'$, son $57 - 23 = 34$. É evidente que F é unión de dous conxuntos incompatibles $N \cap F'$ e $F \cap N$, xa que os que se apuntaron a fútbol poden dividirse en dous grupos: os que practican tamén natación e os que non, logo $F = (F \cap N) \cup (F \cap N')$ e o mesmo acontece con N , $N = (N \cap F') \cup (F \cap N)$.

Por outra banda, $F \cup N$ está formado por $F \cap N'$, $F \cap N$ e $N \cap F'$, en consecuencia está composto por $52 + 23 + 34 = 109$ mozos. Finalmente, o conxunto $F' \cap N'$ os que non se apuntaron a fútbol e non se apuntaron a natación, constitúe o complementario dos que se inscribiron en algo, $F \cup N$, e en consecuencia $(F \cup N)' = F' \cap N'$ ademais resulta ser: $120 - 109 = 11$.

Imos deducir algunhas propiedades das operacións con sucesos mencionadas antes. Aínda que non é unha nova operación definimos a **diferenza de sucesos** $A - B$ como o suceso $A \cap B'$ é dicir, os elementos de A que non pertencen a B . Segundo isto os elementos de A divídense en dous sucesos incompatibles: os que pertencen tamén a B e os que non pertencen a B , pero si a B' . Logo $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$. Do mesmo modo, resulta doado de ver que o complementario do complementario de A , $(A')'$, é o propio A .

Maíor dificultade e interese ofrecen as **leis de De Morgan**, vímolos na última pregunta do exemplo 1, que enunciámos así:

1ª $(A \cup B)' = A' \cap B'$, o complementario da unión é igual á intersección de complementarios.

2ª $(A \cap B)' = A' \cup B'$ o complementario da intersección é igual á unión de complementarios.

Exemplo

2. Comproba as leis de De Morgan no xogo de tirar un dado, sabendo que $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{5, 6\}$.

Solución:

Se $A = \{2, 4, 6\}$, $A' = \{1, 3, 5\}$; e como $B = \{5, 6\}$, entón $B' = \{1, 2, 3, 4\}$. Por outra parte $A \cap B = \{6\}$.

Primeira lei de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Dado que $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $(A \cup B)' = \{1, 3\}$; e por outro lado $A' \cap B' = \{1, 3\}$. Logo a igualdade cúmprese.

Segunda lei de De Morgan: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Dado que $A \cap B = \{6\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; e por outra parte $A' \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Logo a igualdade tamén se cumpre.

2. Definición de probabilidade dun suceso

Ao realizar un experimento aleatorio descoñecemos cal vai ser o resultado, polo que non temos a certeza de que aconteza ou non un determinado suceso A ; pero si podemos asignar ao suceso A un número que mida a posibilidade de que aconteza. Este número chámase probabilidade do suceso A e simbolízase por $P(A)$.

2.1. Propiedades da probabilidade dun suceso

Antes de asignar un número a cada un dos sucesos dun experimento aleatorio, imos establecer algunhas propiedades desexables desa asignación. Para cada suceso A , é dicir, para cada subconxunto do espazo mostral E , ao número $P(A)$, que mide a probabilidade de que A aconteza, ímoslle impoñer que cumpra as seguintes esixencias (ou axiomas):

1. Para cada suceso A , $P(A) \geq 0$.
2. A probabilidade do suceso seguro, E , é igual a 1, $P(E) = 1$.
3. Se A e B son dous sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entón $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Aínda sen saber cómo asignaremos probabilidades a un suceso, atopámonos xa con algunhas consecuencias dos axiomas anteriores, e que nada teñen que ver co modo de calcular $P(A)$. Vexámolas, son as consecuencias seguintes:

1. Para cada suceso A , a probabilidade do complementario, A' , é igual a 1 menos a probabilidade de A , $P(A') = 1 - P(A)$.

Demostración: Como $E = A \cup A'$ e $A \cap A' = \emptyset$, segundo o axioma 3, $P(E) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ e polo axioma 2, $1 = P(A) + P(A')$. Despexando $P(A')$, resulta $P(A') = 1 - P(A)$. Esta fórmula é sumamente útil porque en moitos problemas resulta máis doado o cálculo da probabilidade de A' que a de A .

2. A probabilidade do suceso imposible é 0, $P(\Phi) = 0$.

Demostración: Como E e Φ son complementarios, da consecuencia anterior, $P(\Phi) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

3. Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son sucesos incompatibles dous a dous, entón

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

Demostración: É unha consecuencia directa do axioma 3.

4. Para cada par de sucesos A e B , cúmprese que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demostración:

Sabemos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, e que $(A \cap B)$ e $(A \cap B')$ son incompatibles, logo

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \text{ e } P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Por outra parte $A \cup B = (A \cap B) \cup B$ e como $A \cap B$ e B son incompatibles \Rightarrow

$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B)$. Substituíndo $P(A \cap B)$ pola expresión calculada antes, obtemos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Esta fórmula emprégase en moitos problemas sinxelos de probabilidade.

Exemplos

3. Se A e B son sucesos dun espazo mostral con $P(A) = 2/5$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/6$.

Calcula: a) $P(A \cup B)$, b) $P(A')$, c) $P(B')$, d) $P(A' \cap B')$ e e) $P(A' \cup B')$.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/5 + 1/3 - 1/6 = 17/30$

b) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 2/5 = 3/5$

c) $P(B') = 1 - P(B) = 1 - 1/3 = 2/3$.

d) Utilizamos a 1ª lei de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, logo

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 17/30 = 13/30$$

e) Utilizamos a 2ª lei de De Morgan:

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \text{ logo } P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/6 = 5/6$$

4. Nun Instituto, a probabilidade de que un alumno aprobe matemáticas é 0,6 e de que aprobe economía é 0,4, mentres que a probabilidade de que aprobe as dúas é 0,3.

a) Cal é a probabilidade de que aprobe matemáticas ou economía ou, o que é o mesmo, de que aprobe ao menos unha destas dúas materias?

b) E de que non aprobe ningunha?

c) E de que non aprobe matemáticas nin economía? (É outra forma de formular o apartado anterior).

Solución: Sexa A o suceso aprobar matemáticas e B aprobar economía. Loxicamente A' é suspender matemáticas e B' é suspender economía.

a) O suceso $A \cup B$ é aprobar polo menos unha materia,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,4 - 0,3 = 0,7.$$

b) Non aprobar ningunha é o suceso complementario de $A \cup B$, logo

$$P(A \cap B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$$

c) Non aprobar matemáticas nin economía é o suceso $A' \cap B'$, que pola 1ª lei de De Morgan é igual que $(A \cup B)'$, logo $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$.

2.2. Asignación de probabilidades pola frecuencia relativa.

A **frecuencia relativa** do suceso, A , f_r é o cociente que resulta ao dividir o número de veces que acontece A , n_A , entre o número de veces que realizamos o experimento aleatorio, N ,

$$f_r(A) = \frac{\text{número de veces que acontece } A}{\text{número de veces que realizamos o experimento}} = \frac{n_A}{N}$$

A frecuencia relativa dun suceso, ao aumentar o número de veces que realizamos o experimento, converxe ou tende a estabilizarse ao redor dun número fixo. Isto é tanto máis notorio cantas máis veces realicemos o experimento. Esta aproximación das frecuencias relativas a un número fixo está garantida pola chamada Lei dos Grandes Números. Deste modo atribuímos como probabilidade do suceso A o número $f_r(A)$. Esta forma de atribuír probabilidades aos sucesos dun experimento aleatorio coñécese por experimentación ou empírica.

Exemplo

5. Unha cadea de montaxe dunha fábrica está dotada dun sistema de alarma que se activa cando se produce un incidente. Sábese por experiencia que a probabilidade diaria de que a alarma se active sen que haxa incidente é 1/50; a probabilidade diaria de que haxa un incidente e a alarma non se active é 1/500; e a probabilidade de que nun día xurda un incidente é 1/100.

a) Calcula a probabilidade diaria de que aconteza un incidente e a alarma se active.

b) Calcula a probabilidade diaria de que a alarma se active.

Solución: Chamaremos A ao suceso a alarma actívase, I ao suceso prodúcese un incidente e aos sucesos A' y I' , non se activa a alarma e non se produce incidente. Segundo isto sabemos que $P(A \cap I) = 1/50$, $P(I \cap A') = 1/500$ e $P(I) = 1/100$

a) Se a alarma salta e se produce un incidente, estamos ante o suceso $A \cap I$. Por outra banda, sabemos que $I = (I \cap A') \cup (I \cap A)$, sendo $(I \cap A')$ e $(I \cap A)$ incompatibles. Logo

$$P(I) = P((I \cap A') \cup (I \cap A)) = P(I \cap A') + P(I \cap A)$$

Substituíndo os valores coñecidos na igualdade anterior,

$$1/100 = 1/500 + P(I \cap A) \Rightarrow 1/100 - 1/500 = 1/125 = 0,008$$

b) Queremos coñecer $P(A)$ e sabemos que $A = (I \cap A) \cup (I' \cap A)$, sendo $(I \cap A)$ e $(I' \cap A)$ sucesos incompatibles.

$$\text{Polo tanto, } P(A) = P((I \cap A) \cup (I' \cap A)) = P(I \cap A) + P(I' \cap A) = 1/125 + 1/50 = 0,028$$

2.3. Asignación de probabilidades en experimentos aleatorios con resultados equiprobables. Regra de Laplace

Cando é previsible que todos os sucesos elementais dun experimento aleatorio teñan a mesma dispoñibilidade de saír podemos atribuír, como probabilidade, a cada un deles o número

$$\frac{1}{n^{\circ} \text{ total sucesos elementais}}$$

Esta asignación de probabilidades que só podemos facer en experimentos aleatorios con resultados ou sucesos elementais equiprobables, é dicir, todos teñen a mesma probabilidade, permítenos dispoñer dunha regra para achar a probabilidade de calquera outro suceso. Vexamos como se fai.

Se $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é un suceso constituído por n sucesos elementais, entón é posible escribir este suceso como unión de sucesos incompatibles dous a dous, así:

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \dots \cup \{a_n\}.$$

A probabilidade de A , se empregamos a consecuencia 3, será:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \dots \cup \{a_n\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}) = \\ &= 1/m + 1/m + 1/m + \dots + 1/m = n/m \end{aligned}$$

Onde supuxemos que m é o número total de sucesos elementais do experimento aleatorio.

Logo,

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de sucesos elementais de } A}{n^{\circ} \text{ de sucesos elementais de } E}$$

Aos elementos de A adóitaselles chamar resultados favorables á realización do suceso A e aos de E , resultados posibles; polo que a fórmula anterior adoita escribirse así:

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ casos favorables}}{N^{\circ} \text{ casos posibles}}$$

A este cociente chámasele **Regra de Laplace**, e será a fórmula que empregaremos na maior parte dos problemas, salvo naqueles en que as probabilidades veñan asignadas xa no enunciado.

Exemplo

6. O control de calidade dunha fábrica descobre que cada 2.000.000 de pezas producidas hai 10000 defectuosas. Se non se modifican as condicións de fabricación, cal é a probabilidade de que unha peza elixida ao chou sexa defectuosa?

Solución: $P(\text{pieza defectuosa}) = 10000/2000000 = 1/200 = 0,005$. O número 0,005 pódese ler como unha porcentaxe $0,005 = 0,5/100 = 0,5\%$. A probabilidade indica unha porcentaxe, é dicir, a porcentaxe de éxito ou de ocorrencia dun suceso.

3. Diagramas en árbore e resolución dalguns problemas sinxelos de probabilidade

3.1. Principio de multiplicación e diagramas en árbore

Nos problemas de probabilidade, ás veces, dannos a probabilidade dalgúns sucesos e pídennos calcular a doutros sen facer referencia á natureza do experimento aleatorio ao que pertencen. Noutros, coñecemos a natureza do experimento aleatorio, case sempre con resultados equiprobables, e pídennos calcular a probabilidade de determinados sucesos. Neste último caso, ao aplicar a regra de Laplace, temos que contar sucesos elementais ou casos favorables e casos posibles. Se o experimento aleatorio é simple como tirar un dado, extraer unha carta dunha baralla, contar rapaces aos que lles gusta o fútbol ou a natación, etc., a enumeración directa dos sucesos elementais é suficiente.

Cando o experimento aleatorio consta de varias probas, é dicir, consiste en tirar varios dados, unha moeda e un dado, extraer varias cartas, extraer varias bólas dunha urna, escoller varias persoas, etc., a enumeración dos sucesos elementais non é tan sinxela. Non obstante, o principio da multiplicación facilita moitas cousas.

Principio da multiplicación: Se un experimento aleatorio está constituído por p probas, tendo cada unha delas $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ resultados, entón o número total de resultados do experimento aleatorio é

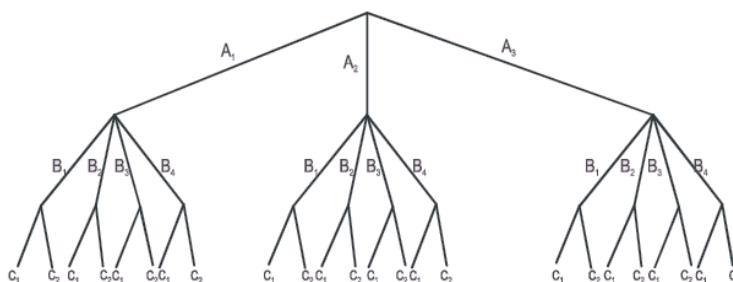
$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_p$$

Os exemplos que veñen a continuación axudarannos a comprender e utilizar este principio.

Exemplo

7. Un restaurante ofrece aos seus clientes unha carta na que hai 3 primeiros pratos, 4 segundos e 2 sobremesas. ¿Cantos menús diferentes se poden elixir?

Solución: Podemos pedir $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús. Se empregamos un diagrama en árbore, podemos, ademais de determinar o número de menús, identificar cada un deles. Supoñamos que A_1, A_2, A_3 , son os primeiros pratos e B_1, B_2, B_3 e B_4 , os segundos e C_1 e C_2 , as sobremesas. Dispoñemos un diagrama en árbore así:



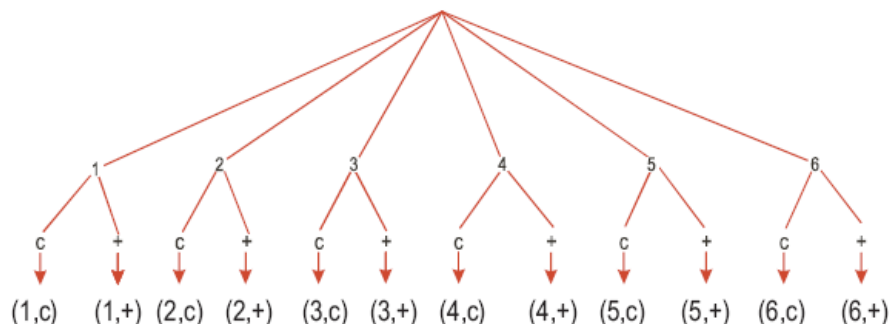
Percorrendo as ramas da árbore de arriba abaixo obtemos $A_1B_1C_1, A_1B_1C_2, \dots, A_3B_4C_2$ en total 24.

O exemplo mostra que os diagramas en árbore son moi útiles non só para contar o número de sucesos elementais dun suceso nun experimento de varias probas, senón tamén para identificar cada un deses sucesos elementais do espazo mostral.

3.2. Diagramas en árbore e problemas de probabilidade

En boa parte dos problemas de probabilidade atopámonos ante experimentos aleatorios de varias probas, e para resolvelos resultan sumamente útiles os diagramas en árbore.

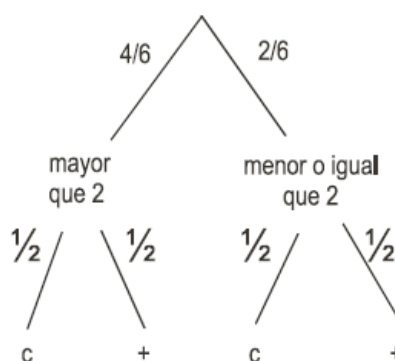
Vexamos, por exemplo, un xogo sinxelo: tírase un dado e unha moeda e queremos coñecer a probabilidade do suceso $A = \{\text{sacar número maior que 2 e cruz}\}$. Un diagrama en árbore axúdanos a coñecer os sucesos elementais do espazo mostral.



Por un sinxelo recuento vemos que $P(A) = 4/12 = 1/3$. Se consideramos o dado primeiro, a probabilidade de obter maior que 2 é $4/6$, é dicir, que esperamos que saia *maior que 2* nos $4/6$ de todas as tiraxes, recorda que a probabilidade é unha porcentaxe. Se a continuación tiramos a moeda é de esperar que saia *cruz* na metade das tiraxes. Polo tanto, ao ter dúas porcentaxes encadeadas, é de esperar que saia *maior que 2 e cruz* nos $4/6 \cdot 1/2$ de todas as tiraxes que fagamos; en consecuencia, a probabilidade de A será:

$$P(A) = 4/6 \cdot 1/2 = 4/12 = 1/3$$

Isto indúcenos a empregar diagramas en árbore reducidos ao suceso A que nos interesa, de modo que o diagrama anterior quedaría reducido a este:

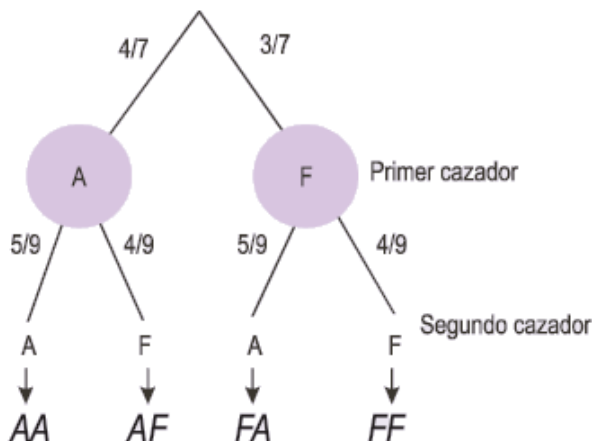


Podemos afirmar, polo tanto, que a probabilidade de A é igual ao produto das probabilidade das ramas que conducen a el. Este tipo de diagramas en árbore, reducidos ao suceso que nos interesa, serán particularmente útiles cando estudemos a probabilidade condicionada.

Exemplos

8. Dous cazadores disparan sobre a mesma lebre. Afortunadamente para a lebre sábese por experiencia que a probabilidade de acertar dun é $4/7$ e doutro, $5/9$. Cal é a probabilidade de que a lebre se salve? Cal é a probabilidade de que polo menos un acerte?

Solución: Facemos un diagrama de dúas probas, unha para cada cazador.



A lebre sálvese se ambos os dous erran e $P(FF) = 3/7 \cdot 4/9 = 0,19$. A probabilidade de que polo menos un acerte corresponde á probabilidade de que acerte o primeiro, o segundo ou os dous á vez, é dicir, dos sucesos elementais: AF, FA e AA

$$P(AF, FA, AA) = P(AF) + P(FA) + P(AA) = 4/7 \cdot 4/9 + 3/7 \cdot 5/9 + 4/7 \cdot 5/9 = 17/21$$

O mesmo resultado obtense de $P(\{\text{polo menos un acerta}\}) = 1 - P(FF) = 1 - 4/21 = 17/21$

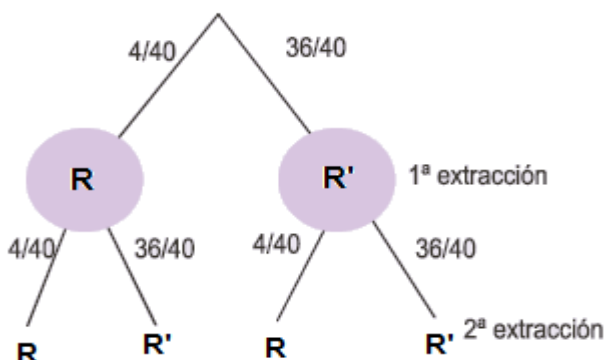
9. Extráense dúas cartas dunha baralla de 40.

a) Se a primeira carta se devolve á baralla, calcula a probabilidade de que ambas as dúas sexan reis.

b) Se a primeira carta non se devolve á baralla, calcula a probabilidade de que ambas as dúas sexan figuras.

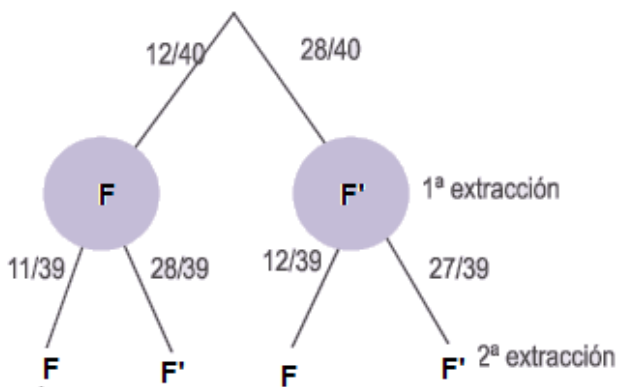
Solución:

a) Simbolizamos por R saír rei e R' por non saír rei.



$$P(RR) = 4/40 \cdot 4/40 = 1/100 = 0,01$$

b) Hai 12 figuras: 4 sotas, 4 cabalos e 4 reis. Se non devolvemos a primeira carta, na segunda extracción hai só 39 dispoñibles. Sexa $F = \{\text{saír figura}\}$ e $F' = \{\text{non saír figura}\}$



$$P(FF) = 12/40 \cdot 11/39 = 0,084$$

4. Probabilidade condicionada

Cando dous sucesos dun experimento aleatorio están relacionados, o coñecemento de que aconteceu un deles pode modificar a probabilidade do outro. Vexamos un exemplo.

Nun curso de 2º CCSS hai 30 alumnos dos cales 17 son rapazas e 13 rapaces. Na avaliación de matemáticas aprobaron 7 rapazas e 8 rapaces.

Resumimos a información anterior nun cadro, tamén chamado táboa de continxencia:

	Aprobados	Suspensos	Total
Rapazas	7	10	17
Rapaces	8	5	13
Total	15	15	30

Se eliximos ao chou unha persoa deste curso estamos ante un experimento aleatorio cuxo espazo mostral ten 30 sucesos elementais e a probabilidade de cada suceso elemental é $1/30$. Consideremos os sucesos

$$A = \{\text{ser unha rapaza}\} \text{ e } B = \{\text{estar aprobado}\}$$

$$\text{Entón } P(A) = 17/30 \text{ e } P(B) = 15/30 = 1/2$$

Se queremos achar a probabilidade do suceso *ser rapaza e aprobar*, esta sería:

$$P(A \cap B) = 7/30$$

Imaxinemos que, neste xogo de elixir unha persoa do curso, alguén sabe que a persoa elixida é unha rapaza e quere saber a probabilidade de que tamén aprobara. Simbolizaremos esta probabilidade por $P(B/A)$, que significa probabilidade de B sabendo que A aconteceu ou probabilidade de B *condicionada* a A . Segundo a táboa temos

$$P(B/A) = 7/17$$

Dividindo numerador e denominador desta fracción por 30 obtense

$$P(B/A) = 7/17 = (7/30)/(17/30) = P(A \cap B)/P(A).$$

É dicir, a **probabilidade de B condicionada a A** , indícanos a proporción de veces que acontece B de entre todas as que acontece A e esta probabilidade calcúlase polas fórmulas:

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) \text{ ou } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Doutro modo, a probabilidade de B *condicionada* a A indica en qué se converte a probabilidade de B cando se restrinxe o conxunto de resultados posibles de E a A .

Exemplo

10. Ao tirar dous dados sábese que a suma dos resultados foi 8. Cal é a probabilidade de que polo menos saíra un 5?

Solución:

O suceso $A = \{a \text{ suma dos dous dados é } 8\} = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$ e o suceso $B = \{\text{polo menos sae un } 5\}$.

É evidente que $A \cap B = \{(3,5), (5,3)\}$, logo $P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/36/5/36 = 2/5$

Non obstante, observamos que a probabilidade de B é $P(B) = 11/36$ ía que hai 11 resultados favorables a que saia 36 polo menos un 5: (1,5), (5,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (5,5), (6,5) e (5,6) entre 36 posibles.

5. Sucesos independentes

Sen dúbida os diagramas en árbore e a identificación de sucesos independentes son os mellores recursos para resolver problemas de probabilidade sinxelos. Vexamos qué caracteriza os sucesos independentes. Consideremos o xogo de tirar un dado e os sucesos

$$A = \{\text{saír menor que } 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{\text{saír impar}\} = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{\text{saír impar e menor que } 5\} = \{1, 3\}$$

A probabilidade destes sucesos é $P(A) = 4/6 = 2/3$, $P(B) = 3/6 = 1/2$ e $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$

A probabilidade de saír impar sabendo que saíu menor que 5, $P(B/A)$, sería

$$P(B/A) = 1/3 / 2/3 = 1/2$$

pero tamén $P(B) = 1/2$ entón $P(B/A) = P(B)$.

É dicir, a probabilidade de B condicionada a A é igual á de B ou, o que é o mesmo, a probabilidade de B non está modificada pola información subministrada por A . Neste caso dise que A e B son independentes e, polo tanto, a fórmula da probabilidade condicionada

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

queda

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta última fórmula é importante porque garante que a probabilidade da intersección de dous sucesos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada unha deles.

Dous sucesos chámanse **sucesos independentes** cando a realización dun deles non subministra información sobre a realización do outro. Pódense atopar nun xogo simple, como o do exemplo anterior, ou en experimentos aleatorios de varias probas. É, nestes xogos, onde os sucesos independentes teñen máis interese.

Sucesos independientes en probas independentes

Nos xogos con varias probas pode acontecer que os sucesos dunha proba sexan independentes dos doutra ou non. Nun caso estamos ante probas independentes en outro, ante probas dependentes. Vexamos algúns experimentos aleatorios dun e outro tipo:

1. Tirar unha moeda e despois un dado. É evidente que o resultado da moeda non inflúe no resultado do dado. Son probas independentes e os sucesos relativos a cada proba son independentes.
2. Extraer dúas cartas dunha baralla. Se ao sacar a primeira carta a devolvemos ao mazo de cartas, temos dúas probas independentes; o resultado da primeira non inflúe no resultado da segunda. Pero senon se devolve a primeira carta ao mazo, entón o resultado da segunda vai depender do resultado da primeira.

Exemplos

11. Extráense dúas cartas dunha baralla de 40.

- a) Se a primeira carta se devolve á baralla, calcula a probabilidade de que ambas as dúas sexan reis.
- b) Se a primeira carta non se devolve á baralla, calcula a probabilidade de que ambas as dúas sexan reis.

Solución: Este problema resolvémolo mediante un diagrama, pero admite outra forma resólvelo. Consideremos os sucesos

$$A = \{ \text{sacar rei na 1ª} \}, B = \{ \text{sacar rei na 2ª} \} \text{ e}$$

$$A \cap B = \{ \text{sacar rei na 1ª e sacar rei na 2ª} \}$$

- a) Se A e B son independentes, e isto acontece cando devolvemos a primeira carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 4/40 \cdot 4/40 = 1/100 = 0,01$$

- b) Se A e B non son independentes, e isto acontece cando non devolvemos a primeira carta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = 4/40 \cdot 3/39 = 1/130$$

12. Calcula a probabilidade de obter polo menos un 6 ao tirar un dado catro veces.

Solución: Cando nos atopamos ante o suceso $\{\text{obter polo menos 6}\}$ debemos pensar que é complementario de $\{\text{non sacar ningún 6}\}$. A probabilidade de $\{\text{non sacar 6}\}$ nunha tiraxe é

$$P(\{\text{no 6}\}) = 5/6$$

Chamemos A_1 ao suceso non sacar 6 no primeiro lanzamento do dado, A_2 ao suceso non sacar 6 no segundo lanzamento e A_3 e A_4 , ao mesmo resultado nos lanzamentos terceiro e cuarto. O suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ é nonsacar 6 nin no primeiro, nin no segundo, nin no terceiro, nin no cuarto lanzamento, todos estes sucesos son independentes xa que o que aconteza nun lanzamento non inflúe no seguinte, e a súa probabilidade será

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = (5/6)^4 = 0,482$$

Logo a probabilidade de obter polo menos un 6

$$P(\{\text{obter polo menos un 6 en catro tiraxes}\}) = 1 - P(\{\text{non sacar 6 en catro tiraxes}\}) = 1 - 0,482 = \mathbf{0,518}.$$

13. Unha persoa desexa xogar nunha atracción de feira, onde regalan un peluche, se ao tirar un dardo acerta nun branco. Se só se permite tirar tres dardos e a probabilidade de acertar en cada tiraxe é 0,3:

- Cal é a probabilidade de levar o peluche?
- Cal é a probabilidade de levar o peluche exactamente ao terceiro intento?

Solución:

Os diagramas en árbore son moi pesados cando temos máis de tres probas; nestes casos resulta máis práctico identificar sucesos independentes. Chamemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{acertar co primeiro dardo}\} & e \quad A'_1 &= \{\text{non acertar co primeiro dardo}\}, \\ A_2 &= \{\text{acertar co segundo dardo}\} & e \quad A'_2 &= \{\text{non acertar co segundo dardo}\}, \\ A_3 &= \{\text{acertar co terceiro dardo}\} & e \quad A'_3 &= \{\text{non acertar co terceiro dardo}\}, \end{aligned}$$

ademais sabemos que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,3$ e $P(A'_1) = P(A'_2) = P(A'_3) = 0,7$. Todos os sucesos mencionados anteriormente son independentes, como pode comprobarse ao realizar a actividade 16. Polo tanto,

a) leva o peluche se polo menos acerta cun dardo, pero isto é o complementario de non acertar con ningún dardo

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = 1 - P(A'_1) \cdot P(A'_2) \cdot P(A'_3) = 1 - 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = \mathbf{0,657};$$

b) leva o peluche no terceiro intento se erra o primeiro e o segundo, pero como A'_1 , A'_2 e A_3 son independentes temos

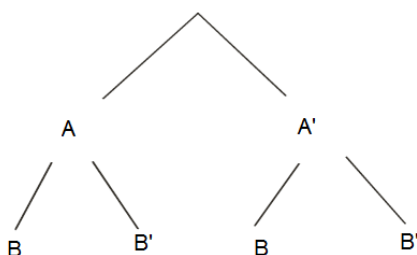
$$P(A'_1 \cap A'_2 \cap A_3) = P(A'_1) \cdot P(A'_2) \cdot P(A_3) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = \mathbf{0,147}.$$

6. Probabilidade condicionada e probabilidade total

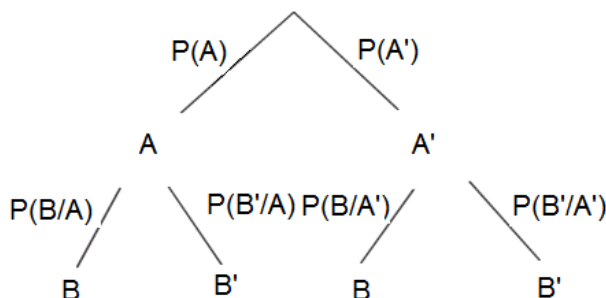
6.1. Probabilidade condicionada e diagramas en árbore

Ao resolver problemas de probabilidade condicionada axudan moito os diagramas en árbore; tanto se son experimentos con varias probas, como se non.

Se atopamos un xogo de dúas probas e A é un suceso da primeira e B é un suceso da segunda, entón é posible esquematizar o xogo así:



Nas ramas deste esquema podemos escribir:



Logo a probabilidade do suceso $A \cap B$ será: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, é dicir, o produto das ramas indica que se realiza A na primeira proba e B na segunda. Porén, a probabilidade de B , dado que $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$, será: $P(B) = P((A \cap B) \cup (A' \cap B)) =$

$P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')$, é dicir, a suma dos produtos das ramas que conducen a el.

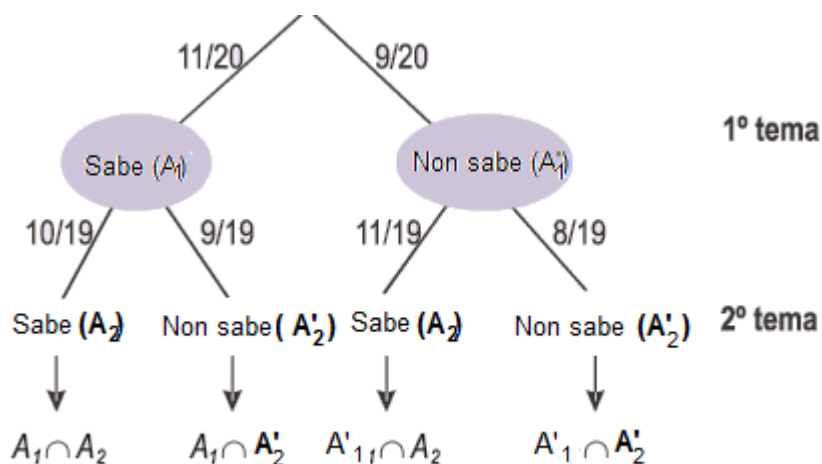
Exemplos

14. Un exame consiste en elixir ao chou dous temas dun programa de 20 e desenvolver un deles. Un alumno sabe 11 temas.

a) Que probabilidade ten de aprobar o exame?

b) Que probabilidade ten de saber un tema e outro non?

Solución: Os sucesos $A_1 = \{\text{sabe o 1º tema}\}$ e $A_2 = \{\text{sabe o 2º tema}\}$ non son independentes porque $P(A_1) = 11/20$, pero $P(A_2) = 10/19$.



a) Aproba se sabe polo menos un,

$$P(\{\text{sabe polo menos un}\}) = 1 - P(\{\text{non sabe ningún}\}) = 1 - P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{77}{95}$$

Como $\frac{77}{95} = 0,8105$, ten máis dun 81% de posibilidades de aprobar. O mesmo resultado obteríamos sumando os produtos das ramas que conducen a $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A'_2$ e $A'_1 \cap A_2$.

b) A suma das probabilidades de $A_1 \cap A'_2$ e $A'_1 \cap A_2$ dá nos a resposta. Por conseguinte,

$$P(A_1 \cap A'_2) + P(A'_1 \cap A_2) = 11/20 \cdot 9/19 + 9/20 \cdot 11/19 = 99/190 = 0,521$$

Nun experimento aleatorio no que non está claro que existan varias probas, tamén resultan útiles os diagramas en árbore como se pon en evidencia no exemplo seguinte.

Exemplos

15. Os resultados dunha enquisa indican que só un 25% dos que invisten en bolsa teñen coñecementos bursátiles. Deles o 70% obtén plusvalías. Non obstante, unicamente un 20% dos que compran accións sen coñecemento do mercado de valores consegue ganancias. Pídese:

- a) Probabilidade de que, elixido un investidor ao chou, obteña beneficios. Que porcentaxe dos que compran accións consegue plusvalías?
- b) Cal é a probabilidade de que un investidor elixido ao chou non teña coñecementos de bolsa e non consiga ganancias?
- c) Cal é a probabilidade de que obtendo beneficios non teña idea da bolsa de valores?

Solución: Distinguiremos dous sucesos $A = \{\text{sabe de bolsa}\}$ e $B = \{\text{obten beneficios}\}$ e os seus contrarios A' e B' . Resolveremos os dous primeiros apartados inicialmente.

a) $P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A') = 0,25 \cdot 0,7 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,325$. Por conseguinte, o 32,5% dos investidores obtén beneficios.

b) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,25 \cdot 0,7 = 0,175$.

c) Trátase de achar a probabilidade $P(A'/B)$, que pola definición de probabilidade condicionada nos conduce a

$$P(A'/B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A') \cdot P(B/A')}{P(B)} = \frac{0,75 \cdot 0,2}{0,325} = 0,46.$$

A xeneralización do apartado a) deste exemplo condúcenos ao teorema da probabilidade total, que veremos axiña, e a xeneralización do apartado c) condúcenos ao teorema de Bayes que veremos no próximo epígrafe.

6.2. Probabilidade total

En ocasións, é posible calcular a probabilidade dun suceso en función das probabilidades condicionadas dese suceso con respecto a un conxunto de sucesos coñecidos. Isto acontece cando o conxunto de sucesos coñecidos constitúe un sistema completo de sucesos. Que é un **sistema completo de sucesos**? Pois un conxunto de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n constitúe un sistema completo de sucesos se cumpre dúas condicións:

- 1ª) Son incompatibles dous a dous, $A_i \cap A_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$.
- 2ª) A unión de A_1, A_2, \dots, A_n é o suceso seguro $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$.

O teorema da probabilidade total di así:

Se A_1, A_2, \dots, A_n é un sistema completo de sucesos e B é un suceso do que unicamente coñecemos as probabilidades condicionais $P(B/A_i)$, entón a $P(B)$ vén dada pola fórmula:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Demostración: Como A_1, A_2, \dots, A_n son incompatibles dous a dous, tamén o son os sucesos $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ e ademais $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$ e en consecuencia

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

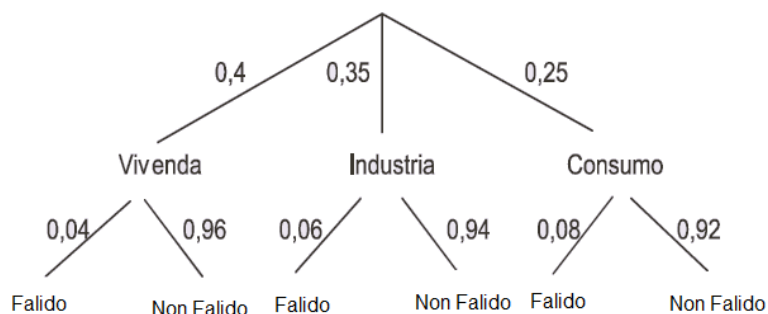
Nos exemplos veremos que xa sabemos resolver problemas da probabilidade total cun sinxelo diagrama en árbore.

Exemplo

16. O 40% dos créditos que concede un banco son para a vivenda, o 35% para a industria e 25% para o consumo. Resultan falidos o 4% dos créditos á vivenda, o 6% dos créditos á industria e o 8% dos créditos ao consumo. Elíxese ao chou un prestatario do banco. Cal é a probabilidade de que non pague o crédito? E cal é a probabilidade de que pague o crédito?

Solución: Os créditos vivenda, industria e consumo forman un sistema completo de sucesos. Son incompatibles e a súa unión constitúe todos os créditos que concede o banco. Cun sinxelo diagrama en árbore de dúas probas veremos mellor as cousas.

Un crédito falido é o que non se paga e sabemos polo teorema da probabilidade total que a probabilidade dun suceso é a suma dos camiños que conducen a el:



$$P(\text{Falido}) = P(\text{Vivenda}) \cdot P(\text{Falido} / \text{Vivenda}) + P(\text{Industria}) \cdot P(\text{Falido} / \text{Industria}) + P(\text{Consumo}) \cdot P(\text{Falido} / \text{Consumo}) = 0,4 \cdot 0,04 + 0,35 \cdot 0,06 + 0,25 \cdot 0,08 = 0,057.$$

É dicir, 5,7% dos créditos resultan falidos.

A probabilidade de que se pague, é dicir, *Non falido*, será: $P(\text{Non falido}) = 1 - P(\text{Falido}) = 1 - 0,057 = 0,943$.

O mesmo resultado atopariamos sumando as ramas que conducen a *Non falido*. En todo caso, non está ben iso de non pagar os empréstimos.

7. Teorema de Bayes

Se interpretamos un sistema completo de sucesos, A_1, A_2, \dots, A_n , como as causas de que se produzan certos efectos, e un deses efectos é un suceso B , entón o **teorema de Bayes** permite calcular a probabilidade de que un efecto teña unha determinada causa. Noutras palabras, permite calcular a probabilidade condicionada $P(A_i/B)$ interpretando esta como a probabilidade de que a causa de B sexa A_i .

O teorema de Bayes ten este enunciado:

Se A_1, A_2, \dots, A_n é un sistema completo de sucesos e B é un suceso calquera do que unicamente coñecemos as probabilidades condicionais $P(B/A_i)$, entón a probabilidade de A_i condicionada a B vén dada pola fórmula

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Demostración: Da definición de probabilidade condicionada podemos escribir

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) \text{ e } P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P(A_i/B)$$

Se dúas cousas son iguais a unha terceira, son tamén iguais entre si; logo

$$P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$$

Despexando $P(A_i/B)$, obtense

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

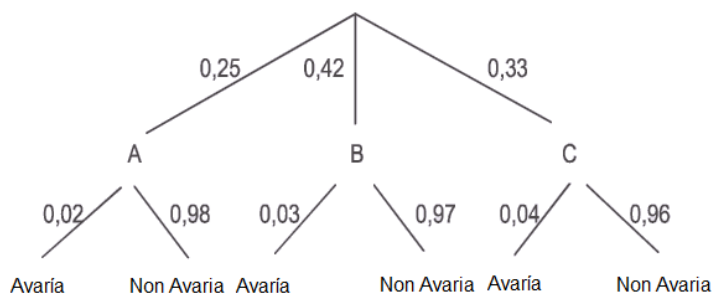
Dado que $P(A_i/B) = P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$, (teorema da probabilidade total).

Exemplos

17. Un modelo de automóbil fábrase en 3 factorías distintas: A , B e C . De A sae o 25% da produción anual, en B faise o 42% e en C o 33%.

O 2% dos coches fabricados en A sofre unha avaría no primeiro mes de rodaxe, o mesmo acontece co 3% dos fabricados en B e co 4% dos fabricados en C . Un cliente ten un coche que se avariou no primeiro mes de uso. Cal é a probabilidade de que se fixera en C ?

Solución: Os sucesos A , B e C están formados polos automóviles que se fabrican en cada unha das factorías. Ademais, constitúen un sistema completo de sucesos: son incompatibles e a súa unión é toda a produción anual deste modelo. Un diagrama en árbore facilita sempre as cousas.



Coñecemos o suceso *o coche avaríouse*, e queremos calcular a probabilidade de *fose fabricado en C*, trátase de achar $P(C/Avaría)$ e é, segundo a fórmula de Bayes,

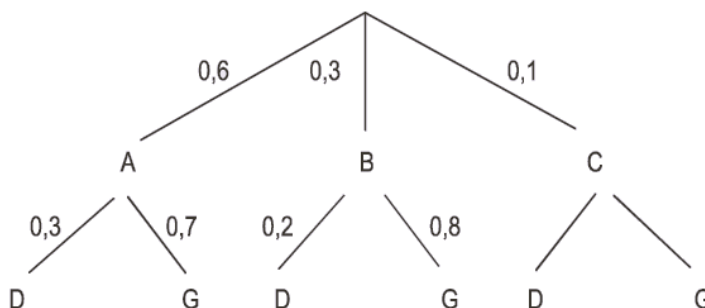
$$P(C/Avaría) = \frac{P(C) \cdot P(Avaría/C)}{P(Avaría)} = \frac{P(C) \cdot P(Avaría/C)}{P(A) \cdot P(Avaría/A) + P(B) \cdot P(Avaría/B) + P(C) \cdot P(Avaría/C)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,25 \cdot 0,02 + 0,42 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04} = 0,4054.$$

18. Seguimos no sector do automóbil. Unha fábrica produce tres modelos de coche: A, B e C. Cada un dos modelos pode ter motor de gasolina ou diésel. Sabemos que o 60% dos modelos son de tipo A e o 30% de tipo B. O 30% dos coches fabricados teñen motor diésel, o 30% dos coches do modelo A son de tipo diésel e o 20% dos coches do modelo B teñen motor diésel. Elíxese un coche ao chou. Pídense as probabilidades dos seguintes sucesos:

- O coche é do modelo C.
- O coche é do modelo A, sabendo que ten motor diésel.
- O coche ten motor diésel, sabendo que é do modelo C.

Solución: A pesar do galimatías que suxire o enunciado, trátase dun problema de probabilidade total e fórmula de Bayes. Talvez o mellor sexa organizar os datos nun diagrama en árbore. O dato "o 30% dos coches fabricados teñen motor diésel" non é espurio, aínda que non encaixe no diagrama, utilizarase no apartado b).



a) Os coches do modelo A, xunto cos coches dos modelos B e C, constitúen un sistema completo de sucesos e, polo tanto, os coches do modelo C serán o 10%. Isto é así porque $1 - (0,6 + 0,3) = 1 - 0,9 = 0,1$.

b) Se D é o suceso ter motor diésel e pídenos calcular $P(A/D)$, pola fórmula de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,3} = 0,6.$$

c) Como $P(D) = 0,3$, empregando a fórmula da probabilidade total, resulta

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)$$

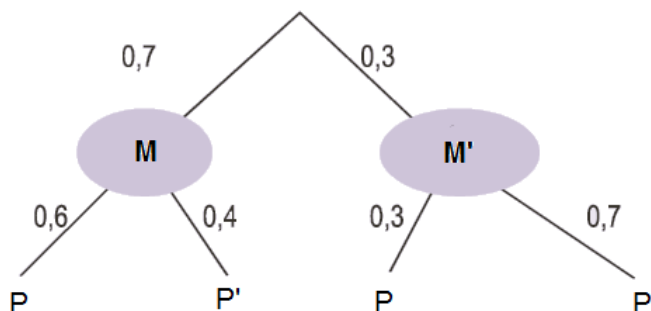
$$0,3 = 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot P(D/C)$$

$$P(D/C) = 0,6$$

19. Continuamos no sector do automóbil, pero agora no negocio do taxi. Tras un estudo realizado sobre os taxistas dunha cidade española, observouse que o 70% ten máis de 40 anos e destes o 60% é propietario do vehículo que conduce. Tamén se descubriu que a porcentaxe de taxistas que, non superando os 40 anos, é propietario do vehículo que conduce redúcese ao 30%. Pídese:

- A probabilidade de que un taxista, elixido ao chou, sexa propietario do vehículo que conduce.
- Elíxese un taxista ao chou, e compróbase que é propietario do vehículo que conduce. Cal é a probabilidade de que teña máis de 40 anos?

Solución: Chamemos P ao suceso ser propietario e P' non ser propietario. O suceso *{máis de 40 anos}* simbolizáremolo por M e o suceso *{igual ou menos de 40 anos}* simbolizáremolo por M' . Cun diagrama en árbore veremos as cousas con máis claridade.



- A probabilidade de P , como M e M' son un sistema completo de sucesos, pode calcularse polo teorema da probabilidade total

$$P(P) = P(M) \cdot P(P|M) + P(M') \cdot P(P|M') = 0,7 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,51.$$

- Trátase de achar a probabilidade de M condicionada a P , $P(M|P)$, empregando a fórmula de Bayes obtemos:

$$P(M|P) = \frac{P(M) \cdot P(P|M)}{P(P)} = \frac{0,7 \cdot 0,6}{0,51} = 0,8235.$$

Anexo Combinatoria

A regra de Laplace obríganos a contar obxectos dun conxunto, casos favorables e casos posibles. Isto non sempre é un labor doado. Para estas situacións, nas que non podemos contar doadamente e os diagramas en árbore resultan pesados ou insuficientes, existen técnicas de cómputo que empregaremos para resolver algúns problemas de probabilidade.

1. Factoriais

Se n é un número natural maior que 1, como sabes, chámase factorial de n ao produto dos n primeiros números naturais. O factorial de n simbolízase por $n!$ e será:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Se nos piden calcular 4 factorial e logo 6 factorial, escribimos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Aceptaremos que $0! = 1$ e tamén $1! = 1$.

2. Variacións con repetición

Podíamos titular este apartado así: como elixir ao chou, sucesivamente e con devolución, p obxectos (ou sucesos elementais) entre n dispoñibles?.

Trátase, en realidade, de elixir un obxecto, rexistralo, devolveo á colección e repetir esta operación ata ter o rexistro dos p obxectos. Un exemplo axudaranos a comprendelo: *cantos resultados distintos podemos obter ao extraer 3 cartas, dunha baralla de 40, se devolvemos cada vez a carta extraída ao mazo?*

Para a 1ª extracción temos 40 cartas posibles, pero se devolvemos a carta, para a 2ª temos tamén 40 e, ao repoñer esta, para a 3ª temos igualmente 40.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados posibles	40	40	40

Logo, polo principio de multiplicación, todos os posibles resultados do xogo serán: $40 \cdot 40 \cdot 40 = 40^3$.

Outro exemplo: *cantos resultados distintos podemos obter ao tirar tres veces un dado?*

Na 1ª tiraxe poden saír 6 resultados, na 2ª tiraxe, como é independente da 1ª, poden saír tamén 6; e na 3ª tamén 6, porque é independente das anteriores.

	1ª tiraxe	2ª tiraxe	3ª tiraxe
Resultados posibles	6	6	6

Polo principio de multiplicación poden saír: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ resultados.

Dun modo xeral, as **variacións con repetición** de n obxectos tomados ou elixidos de p en p son os grupos de p obxectos nos que pode haber obxectos diferentes ou repetidos. Ademais dous grupos serán distintos se teñen distintos obxectos ou, se teñen os mesmos, en orde diferente.

As variacións con repetición de n obxectos tomados de p en p simbolízanse por $VR_{n,p}$, e o seu número vén dado por

$$VR_{n,p} = n^p$$

Exemplo

1. Cantos números de teléfono fixo poden empezar por 91?

Solución: Os números de teléfono fixo teñen 9 lugares, como temos os dous primeiros fixos, cun 9 e un 1, dispoñemos de dez cifras, de 0 a 9, para encher cada un dos sete lugares restantes. Trátase de variacións con repetición de 10 elementos tomados de 7 en 7, $VR_{10,7} = 10^7 = 10000000$. Hai, polo tanto, posibilidade de ter ata dez millóns de números de teléfono fixo na Comunidade de Madrid.

3. Variacións ordinarias

Dispoñemos agora n obxectos dos que eliximos, sucesivamente e sen devolución, p obxectos. Por exemplo, de cantas maneiras diferentes poden extraerse 3 cartas dunha baralla de 40, se non se devolve ningunha ao mazo despois de cada extracción?

Para a 1ª extracción dispoñemos de 40 resultados posibles; para a 2ª, 39 e para a 3ª unicamente 38, que son as cartas que quedan no mazo despois das dúas primeiras extraccións.

	1ª extracción	2ª extracción	3ª extracción
Resultados	40	39	38

Polo principio de multiplicación serán: $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$ maneiras diferentes.

En xeral, as **variacións ordinarias** de n obxectos tomados de p en p son todos os grupos de p obxectos que poden formarse cos n dispoñibles. Ademais, dúas variacións son distintas se teñen distintos obxectos ou se teñen os mesmos en orde diferente.

Simbolizaremos as variacións simples de n obxectos tomados de p en p por $V_{n,p}$. Para calcular o seu número, como vimos no exemplo, imaxinemos que dispoñemos de p caixas

1ª caixa 2ª caixa 3ª caixa p -ésima caixa

Para a primeira podemos seleccionar n obxectos. Feito isto, quedánnos $n-1$ para a segunda; $n-2$ para terceira. Continuado desta forma, para a última caixa, a p -ésima, quedánnos $n - (p - 1)$, é dicir, $n - p + 1$.

Aplicando agora o principio de multiplicación:

$$V_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$$

En ocasións empregamos outra fórmula para calcular as variacións. Se o segundo membro da igualdade anterior multiplicámolo e dividimos por $(n - p)!$

$$\text{resulta: } V_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos

2. Nunha carreira de 100 m participan 6 corredores. De cantas maneiras diferentes se poden repartir as medallas de ouro, prata e bronce?

Solución: Indicamos os 3 primeiros lugares de chegada coas palabras ouro, prata e bronce.

1º ouro	2º prata	3º bronce
6	5	4

Para o primeiro lugar pode elixirse calquera dos 6 corredores, para o segundo só poden elixirse 5, porque un xa chegou primeiro, e para o terceiro lugar só poden elixirse 4 corredores, os que quedan. Trátase de variacións simples de 6 obxectos tomados de 3 en 3, $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120 \text{ maneiras diferentes}}$.

3. Cantos números de 4 cifras diferentes maiores que 3000 é posible escribir cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Solución: Os números de 4 cifras maiores que 3000 que podemos formar con {1, 2, 3, 4, 5, 6} deben comezar por 3, 4, 5 ou 6, para os outros tres lugares hai dispoñibles 5 cifras para agrupar de 3 en 3, e como as cifras han de ser diferentes estamos ante $V_{5,3}$. En consecuencia, o total de números maiores que 3000 será:

$$4 \cdot V_{5,3} = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{240}$$

4. Permutacións ordinarias

¿Que acontecería se dispuxésemos de n obxectos e eliximos, sucesivamente e sen devolución, n obxectos? Estariamos ante o problema de calcular variacións simples de n obxectos tomados de n en n . Para resolvelo dispoñemos, como no apartado anterior, de n caixas

1ª caixa 2ª caixa 3ª caixa n-ésima caixa

Para a primeira podemos seleccionar n obxectos; para a segunda $n-1$; para a terceira $n-2$. Procedendo de a mesma forma, cando cheguemos á n -ésima caixa só nos quedará un obxecto dispoñible, $n-n+1=1$. Aplicando a fórmula temos:

$$V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

As variacións simples de n obxectos tomados de n en n chámanse **permutacións** de n obxectos e corresponden a todas as posibles ordenacións do conxunto deses n obxectos. Simbolízanse por P_n e vimos que o seu número é: $P_n = n!$

Exemplo

4. Dous rapaces e dúas rapazas entran nunha cafetaría; se pola porta só cabe unha persoa, de cantas formas posibles poden entrar?

Solución: Son catro persoas que unicamente poden entrar de un en un, logo as formas posibles de entrar son:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

5. Combinacións

Cando a orde na cal foron elixidos os p obxectos entre os n dispoñibles non nos interesa, estamos ante combinacións de n obxectos tomados de p en p . Empregaremos as combinacións cando fagamos extraccións simultáneas.

Por exemplo, imaxinemos unha urna con oito bólas iguais numeradas de 1 a 8. Extraemos 3 bólas, sen devolver ningunha. Neste caso atendemos unicamente aos números que levan as bólas extraídas e non reparamos na orde de saída. Obtemos así subconxuntos de 3 elementos dun conxunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de oito elementos.

O número de subconxuntos de 3 elementos que se poden formar cun conxunto de oito elementos simbolízase por $C_{8,3}$, e leese combinacións de 8 elementos tomados de 3 en 3. É evidente que cada un destes subconxuntos de 3 elementos, digamos o $\{2, 5, 7\}$, pode ordenarse de $3!$ maneiras diferentes; en consecuencia, hai $3!$ veces máis, subconxuntos de 3 elementos ordenados, $V_{5,3}$, que non ordenados $C_{5,3}$; isto permítenos establecer a igualdade:

$$C_{5,3} \cdot 3! = V_{5,3}$$

de onde $C_{5,3} = V_{5,3} / 3!$

Xeneralizando, definimos **combinacións** de n elementos, tomados de p en p , os grupos de p elementos distintos, de modo que dúas combinacións son diferentes se se diferencian nalgún elemento. Non obstante, dúas combinacións son iguais se teñen os mesmos elementos a pesar da orde en que aparezan.

O número de combinacións de n elementos tomados de p en p simbolizámolo por C ou por $\binom{n}{p}$ e como vimos no exemplo calcúlanse pola fórmula:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!}$$

Por outra parte, como $V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ podemos escribir

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{V_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplos

5. Nun curso de 2º de bacharelato hai 26 alumnos e débese elixir unha comisión formada por tres alumnos. Cantas comisións se poden formar?

Solución: Nunha comisión non hai unha xerarquía que implique unha orde, logo trátase de combinacións de 26 elementos tomados de 3 en 3, é dicir,

$$C_{26,3} = 26! / 3! \cdot 23! = 2600$$

6. Nun curso de 2º de bacharelato hai 12 rapaces e 14 rapazas e débese elixir unha comisión integrada por dous rapaces e dúas rapazas. Cantas comisións se poden formar?

Solución:

Nas comisións aplicamos combinacións. Hai $C_{12,2}=66$ maneiras de elixir 2 rapaces entre 12 e $C_{14,2}=91$ de elixir 2 rapazas entre 14.

Polo principio de multiplicación haberá $C_{12,2} \cdot C_{14,2}$ comisións formadas por 2 rapaces e 2 rapazas, é dicir, $C_{12,2} \cdot C_{14,2}=66 \cdot 91=6006$ comisións.

7. Repártense 4 cartas dunha baralla de 40, é o que os xogadores chaman unha man.

- a) Cantas mans distintas poden dar?
- b) Cantas destas mans están formadas unicamente por bastos?
- c) En cantas mans entran dous cabalos?
- d) En cantas mans entran dúas copas e unha espada?
- e) En cantas mans aparecerán polo menos tres copas?

Solución:

a) $C_{40,4} = 40! / 4! \cdot 36! = 91390$.

b) Hai 10 cartas de bastos e con elas podemos formar $C_{10,4}=210$ grupos de 4 bastos.

c) A baralla ten 4 cabalos e con eles podemos formar $C_{4,2}$ grupos de 2 cabalos. Quédannos $40 - 4 = 36$ cartas para elixir as outras 2 que faltan. Polo principio de multiplicación, haberá $C_{4,2} \cdot C_{36,2}=3780$ mans con dous cabalos;

d) Dispoñemos de 10 copas para tomar 2 e podémolo facer de $C_{10,2}$ maneiras, e 10 espadas para tomar 1, e isto podémolo facer $C_{10,1}=10$ maneiras.

Quédannos $40-10-10=20$ cartas para elixir a cuarta; entón, polo principio de multiplicación, teremos: $C_{10,2} \cdot C_{10,1} \cdot C_{20,1} = C_{10,2} \cdot 10 \cdot 20 = 9000$ mans con 2 copas e 1 espada.

e) Se nunha man entran polo menos 3 copas, quere dicir que entrarán 3 ou 4 copas. Entran 3 en $C_{10,3} \cdot C_{30,1} = C_{10,3} \cdot 30 = 3600$ mans. Entran 4 copas $C_{10,4}=210$ mans. En total, entran 3 ou 4 copas en $C_{10,3} \cdot 30 + C_{10,4}=3600 + 210$