

Unidade 8. Representación de funcións

1 Estudo e representación de función

Como pode observarse, as funcións que van aparecendo presentan unha complexidade cada vez maior, polo que requiren de métodos máis sofisticados para o seu estudo. Xa non podemos coñecer o seu comportamento mediante unha táboa de valores, como coas lineais, ou a través dalgúns puntos característicos das funcións, como coas cuadráticas ou as de proporcionalidade inversa máis sinxelas.

Debemos desbotar a pretensión de coñecer exactamente o que fai unha función punto a punto e temos que centrarnos naqueles puntos que realmente caracterizan a función. Xa vimos algúns, como os puntos críticos e os de inflexión. Estes puntos permítenos descubrir o comportamento da función. Este pode ser completado co estudo das asíntotas, do signo da función, etc. Polo tanto, a nosa pregunta é: que necesitamos estudar da función para coñecela con detalle? Despois tocaranos o proceso de axustar convenientemente toda a información obtida, de modo que o crebacabezas encaixe e non aparezan resultados contraditorios.

Os pasos para efectuar o estudo e a representación gráfica dunha función son os seguintes:

1. Cálculo do dominio da función.
2. Estudo da simetría e da periodicidade
3. Cálculo dos puntos de corte da función cos eixes de coordenadas.
4. Estudo do signo da función.
5. Cálculo das asíntotas e da forma na que a función se achega a ela.
6. Estudo da monotonía (crecemento e decrecemento).
7. Cálculo dos puntos críticos (máximos e mínimos relativos).
8. Estudo da curvatura (concavidade e convexidade).
9. Cálculo dos puntos de inflexión.

Os 5 primeiros pasos sácanse directamente da función; 6º e 7º da derivada primeira; 8º e 9º da derivada segunda (tamén no 7º podemos necesitar esta derivada). Habitualmente, o colofón deste estudo é o esbozo dunha gráfica da función, isto é, a súa representación gráfica. Loxicamente, as informacións obtidas nos distintos pasos deben ser coherentes as unhas coas outras e non entrar en contradición. Se ocorre isto último, hai que pensar que nos confundiríamos nalgún punto e repetir os cálculos pertinentes ata que desaparezan as incongruencias.

Repasemos como se efectúan cada un dos cálculos anteriores.

1. Dominio:

Os casos nos que o dominio é distinto a \mathbb{R} son os seguintes:

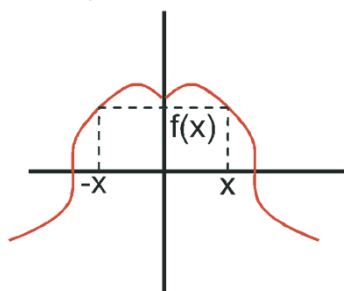
Función	Cálculo do dominio
$f(x) = \frac{NUM(x)}{DEN(x)}$	$DEN = 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / DEN(x)=0\}$
$f(x) = \sqrt{RADICANDO(x)}$	$RAD(x) \geq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / RAD(x) \geq 0\}$
$f(x) = \log ARGUMENTO(x)$	$ARG(x) > 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / ARG(x) > 0\}$

2. Simetría e periodicidade:

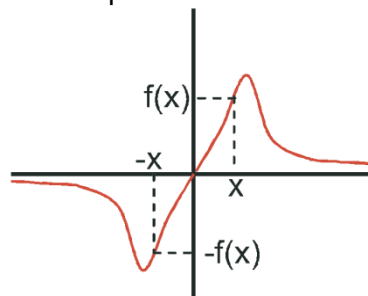
f é par se $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ é simétrica respecto ao eixe OY

f é impar se $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ é simétrica respecto á orixe de coordenadas.

Función par



Función impar



A función par coincide ao doblala respecto ao eixe OY. A impar coincide se trazamos rectas que pasen pola orixe de coordenadas, ou ben, dobrando primeiro polo eixe OY e despois polo OX. Se non se verifica ninguna das igualdades anteriores, dicimos que a función non é simétrica.

A periodicidade só se estuda para as función trigonométricas, polo que prescindiremos do seu estudo.

3. Puntos de corte da función cos eixes de coordenadas:

Para descubrir as coordenadas dos puntos de corte da función co eixe OX hai que igualar a función a cero. Escribimos abreviadamente: $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$. Teremos tantos puntos de corte como solución teña a ecuación $f(x) = 0$

Para achar o punto de corte da función co eixe OY hai que substituír na función a x por 0 (cero). Escribimos abreviadamente $f \cap OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, f(0))$. Teremos un ou ningún punto de corte, dependendo da existencia de $f(0)$. Se ao resolver a ecuación $f(x) = 0$ aparece a solución $x = 0$, o punto de corte co eixe OY é a orixe de coordenadas $(0, 0)$

4. Signo da función:

Para estudalo hai que resolver a inecuación $f(x) \geq 0$. Para facelo usaremos distintas estratexias dependendo do tipo de función, aínda que as dúas fundamentais son as seguintes:

- I. Se a función é polinómica, resólvese a ecuación $f(x)=0$, descompoñéndose a recta real en intervalos dados polas solución da devandita ecuación.
- II. Se a función é un cociente de polinomios, iguálanse numerador e denominador a cero por separado $\begin{cases} NUM(x) = 0 \\ DEN(x) = 0 \end{cases}$ e descomponse a recta real en intervalos dados polas solución de ambas as dúas ecuacións.

Os demais puntos (asíntotas, monotonía, puntos críticos, curvatura e puntos de inflexión) xa foron tratados nas leccións anteriores, polo que non repetiremos o xa dito.

Para a representación adóitase proceder da forma seguinte:

1. Marcamos os puntos de corte e os críticos. Nestes últimos facemos un arco: para un máximo e para un mínimo.
2. Representamos as asíntotas e o comportamento da función nas súas proximidades.
3. Unimos os puntos e as liñas representadas

Habitualmente as representacións non adoitan facerse estrictamente a escala, xa que o que interesa é destacar as propiedades máis relevantes da función, que poden ser desvirtuadas pola devandita escala.

Exemplos

1. Estuda e representa a función $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

Solución:

- i. Dominio: como é un polinomio, $\text{Dom } y = \mathbb{R}$.
- ii. Simetría: $y(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$
 \Rightarrow Non é simétrica
- iii. Puntos de corte cos eixes:
 $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \text{ (dobre)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (0, 0); (2, 0) \rightarrow f \cap OX \Rightarrow (0, 0)$.
- iv. Signo: $y = x(x - 2)^2$. Como $x = 2$ é solución dobre, non inflúe no signo, posto que o factor está elevado ao cadrado, sendos sempre positivo (salvo en $x = 2$ que sería cero). Hai que descomponer a recta real en dous anacos.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty) - \{2\}$
sgn y	-	+

- v. Asíntotas: AV: como se trata dunha función polinómica non ten asíntotas verticais.

$$\text{AH: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \begin{cases} -\infty, & \text{cando } x \rightarrow -\infty \\ \infty, & \text{cando } x \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow Non ten asíntota horizontal

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = \infty \Rightarrow$ Non ten asíntota oblicua

Ao ser una función polinómica de grao superior ao primeiro, non ten asíntotas de ningún tipo. Os límites no infinito permiten descubrir cara onde vai a función

vi. Monotonía: $y' = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, 2$

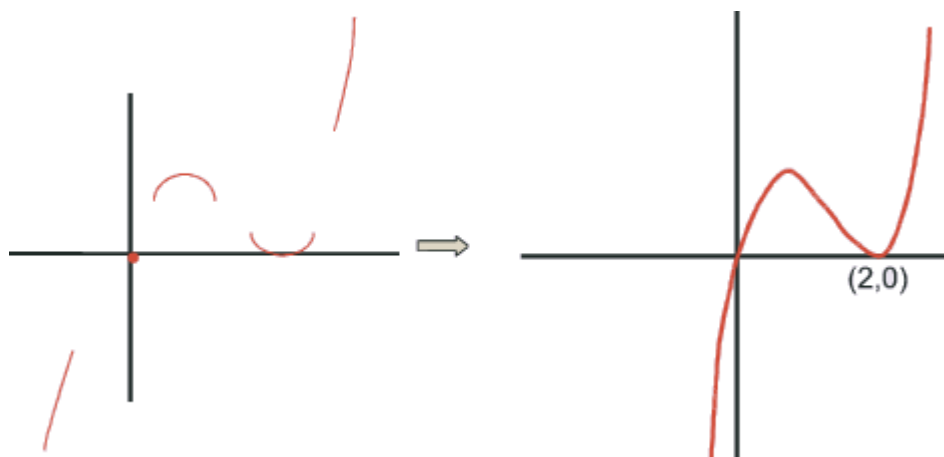
	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
sgn y'	+	-	+
y	C↑	D↓	C↑

vii. Puntos críticos : máximo no punto $(\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ e un mínimo en $(2, 0)$

viii. Curvatura: $y'' = 6x - 8 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Punto de inflexión $(\frac{4}{3}, \frac{16}{27})$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
sgn y''	-	+
y	∩	∪

Recordámosche que todas as ordenadas dos puntos se calculan na función, non nas súas derivadas.



2 Estuda e representa a función $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5$

Solución:

i. Dominio: como é un polinomio, Dom $y = \mathbb{R}$

ii. Simetrías: $y(-x) = \frac{(-x)^4}{12} - \frac{(-x)^3}{6} - (-x)^2 + 5 = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + 5 \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$

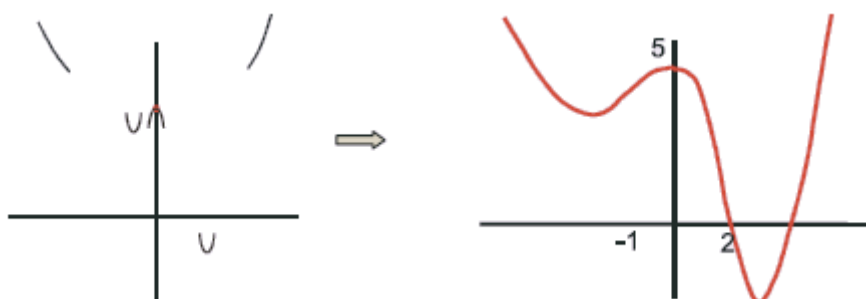
\Rightarrow Non é simétrica.

- iii. Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{Non se poden achar} \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = 5 \Rightarrow (0,5) \end{cases}$
- Aínda que usemos a Regra de Ruffini para resolver a ecuación $y = 0$, non obtemos os puntos de corte. Só pode facerse con métodos numéricos, procedementos que superan o nivel deste curso. Debemos agardar e ver se co resto dos datos podemos esbozar a gráfica da función.
- iv. Signo: non pode estudarse
- v. Asíntotas:
- AV: non ten asíntotas verticais por ser un polinomio.
 - AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5 \right) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{12} = \pm\infty \Rightarrow$ Non ten asíntota horizontal
 - A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5}{x} = \pm\infty \Rightarrow$ Non ten asíntota oblicua
- vi. Monotonía: $y' = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 2 \right) = 0 \Rightarrow x = x_1, 0, x_2$ con $x_1 = \frac{3-\sqrt{105}}{4} \cong -1,81$; $x_2 = \frac{3+\sqrt{105}}{4} \cong 3,31$
- vii. Puntos críticos: mínimos en $(x_1, y(x_1))$ e $(x_2, y(x_2))$ e máximo en $(0,5)$, con $y(x_1) \cong 3,61$; $y(x_2) \cong -1,997$

	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, 0)$	$(0, x_2)$	(x_2, ∞)
sgn y'	-	+	-	+
y	D↓	C↑	D↓	C↑

- viii. Curvatura: $y'' = x^2 - x - 2 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2$.
Punto de inflexión $\left(-1, \frac{17}{4}\right)$; $(2, 1)$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
sgn y''	+	-	+
y	U	∩	U



Á vista da gráfica, observamos que a función corta o eixe OX es dous puntos, ambos os dous con abscisas positivas maiores que dous.

3 Estuda e representa a función $y = \frac{x-7}{x+2}$

Solución:

i. Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

Simetría: $y(-x) = \frac{-x-7}{-x+2} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow \text{Non é simétrica}$

ii. Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7,0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \frac{-7}{2} \Rightarrow (0, -\frac{7}{2}) \end{cases}$

iii. Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 7)$	$(7, \infty)$
sgn y	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$

iv. Asíntotas:

$$AV: x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-7}{x+2} = \frac{-9}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-7}{x+2} = \frac{-9}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-7}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \Rightarrow \text{Non ten asíntota Ob por ter horizontal.}$

$$y - y_H = \frac{x-7}{x+2} - 1 = \frac{9}{x+2} = \begin{cases} > 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y > y_H \\ < 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y < y_H \end{cases}$$

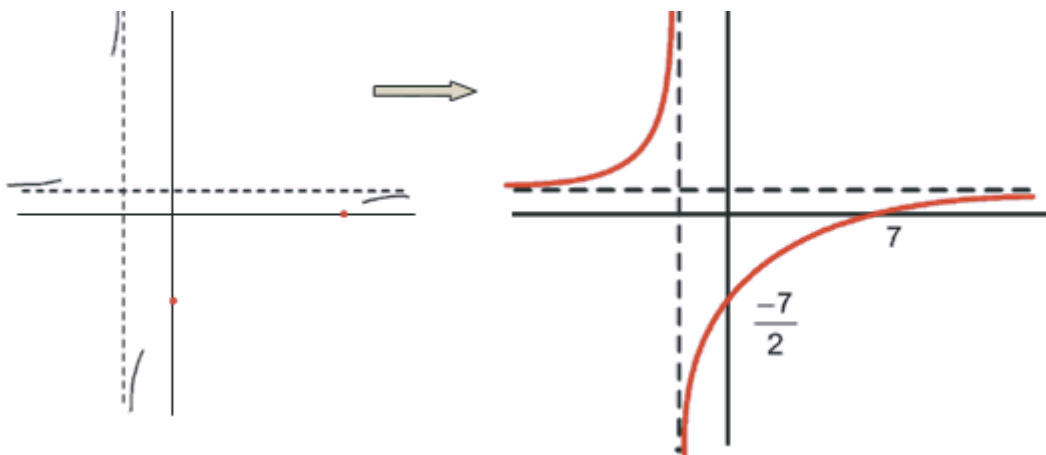
v. Monotonía: $y' = \frac{9}{(x+2)^2} \Rightarrow y' > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow y \text{ é crecente en todo o seu dominio}$

vi. Non ten puntos críticos, porque $y' \neq 0$

vii. Curvatura: $y'' = \frac{-18}{(x+2)^3} \begin{cases} NUM < 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
sgn y''	+	-
y	U	∩

viii. Non ten puntos de inflexión, pois $y'' \neq 0$



4 Estuda e representa a función $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$

Solución:

i. Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{5\}$

ii. Simetría: $y(-x) = \frac{(-x)^2-5(-x)+4}{-x-5} = \frac{x^2+5x+4}{-x-5} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow \text{Non é simétrica}$

iii. Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1, 4 \Rightarrow (1,0); (4,0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \frac{-4}{5} \Rightarrow (0, -\frac{4}{5}) \end{cases}$

iv. Signo:

$$\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 1, 4 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
sgn y	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$

v. Asintotas AV: $x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2-5x+4}{x-5} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2-5x+4}{x-5} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm \infty \Rightarrow \text{Non ten AH}$

Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$; $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-5x+4}{x-5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-5} = 0$

$\Rightarrow y_{Ob} = x$. Achégase do modo seguinte: $y - y_{Ob} = \frac{x^2-5x+4}{x-5} - x = \frac{4}{x-5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sgn}(y - y_{Ob}) = \text{sgn} \frac{4}{x-5} = 0 = \begin{cases} < 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \\ > 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \end{cases}$

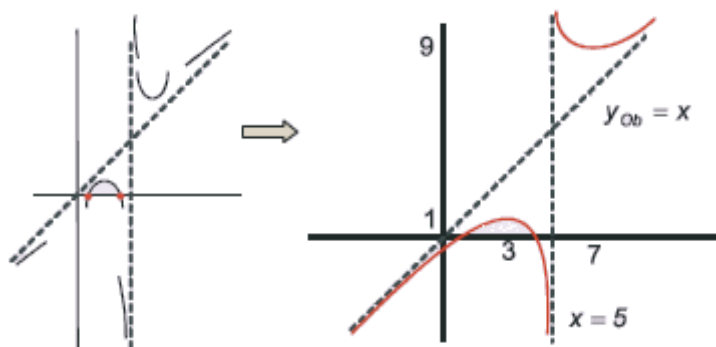
vi. Monotonía: $y' = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 3, 7 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{5\} \end{cases}$

	$(-\infty, 3)$	$(3, 7) - \{5\}$	$(7, \infty)$
sgn y'	+	-	+
y	C↑	D↓	C↑

vii. Puntos críticos: máximo en (3, 1) e mínimo en (7, 9)

viii. Curvatura: $y'' = \frac{8}{(x-5)^3} \begin{cases} NUM > 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 5(\text{triple}) \end{cases}$. Non ten puntos de inflexión.

	$(-\infty, 5)$	$(5, \infty)$
sgn y''	-	+
y	∩	∪



5 Estuda e representa a función $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-9}$

Solución:

- i. Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- ii. Simetría: $f(-x) = \frac{(-x)^2+9}{(-x)^2-9} = \frac{x^2+9}{x^2-9} = f(x) \Rightarrow$ é par, simétrica respecto ao eixe OY

- iii. Puntos de corte cos eixes:

$$\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Non corta o eixe OX} \\ f \cap OY \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1) \end{cases}$$

- iv. Signo: $\begin{cases} NUM > 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
sgn y	+	-	+

- v. Asíntotas: AA VV:

$$x = -3 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{18}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{18}{0^-} = -\infty \end{cases} ; x = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{9}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{9}{0^+} = \infty \end{cases}$$

$$\text{AH: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+9}{x^2-9} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \Rightarrow f - y_H = \frac{18}{x^2-9} > 0 \text{ cando } x \rightarrow \pm\infty.$$

Non ten A Ob por ter AH.

- vi. Monotonía: $f'(x) = \frac{-36x}{(x^2-9)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{\pm 3\} \end{cases}$

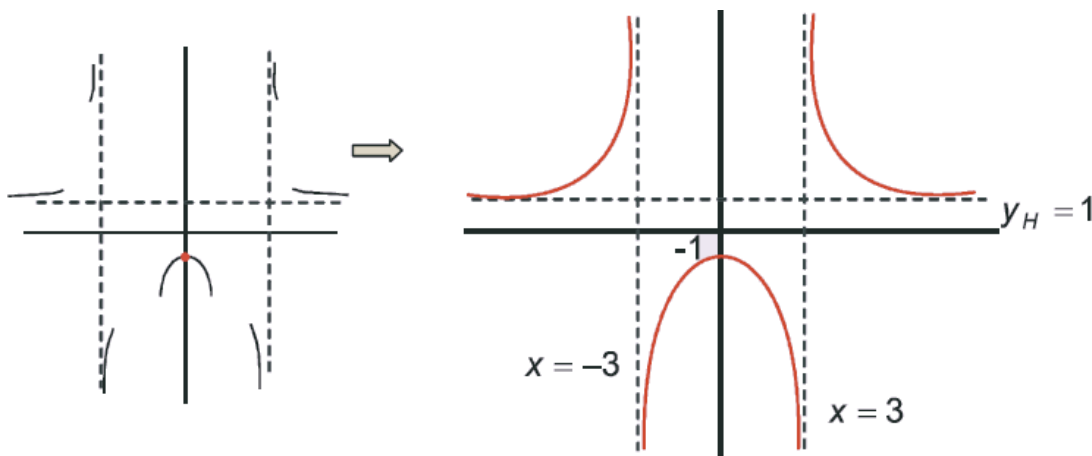
	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f'	+	-
f	C↑	D↓

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
sgn f''	+	-	+
f	U	∩	U

- vii. Puntos críticos: máximo en $(0, -1)$

- viii. Curvatura: $f''(x) = \frac{108x^2+324}{(x^2-9)^3} \begin{cases} NUM > 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ (triples)} \end{cases}$

Non ten puntos de inflexión



6 Estuda e representa a función $y = \frac{x}{x^2+9}$

Solución:

- Dominio: $DEN > 0 \Rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}$
- Simetría: $y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+9} = -\frac{x}{x^2+9} = -y(x) \Rightarrow$ é impar, simétrica respecto da orixe de coordenadas
- Puntos de corte cos eixes: $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$. Curta ambos os dous eixes na orixe de coordenadas.

- Signo: $\begin{cases} NUM = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y	-	+

- Asíntotas: Non ten AV;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+9} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y_H = 0$$

$$y - y_H = \frac{x}{x^2+9} \begin{cases} < 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_H \\ > 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_H \end{cases}. \text{ Non ten A Ob por ter AH}$$

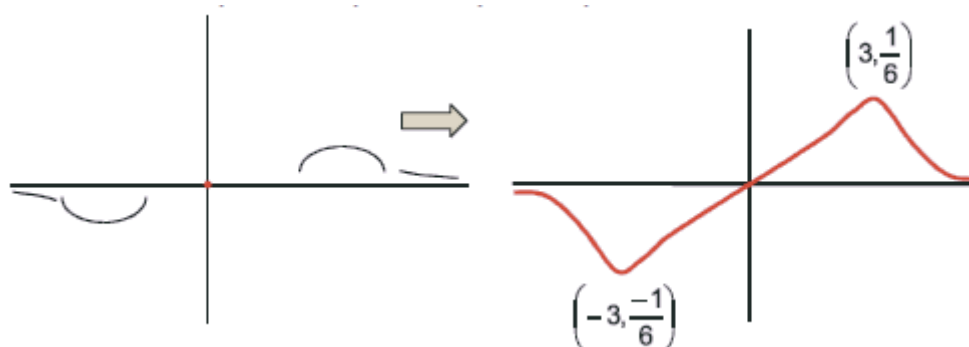
- Monotonía: $y' = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ DEN > 0 \end{cases}$
- Puntos críticos: mínimo en $(-3, -\frac{1}{6})$ e máximo en $(3, \frac{1}{6})$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
sgn y'	-	+	-
y	D↓	C↑	D↓

- Curvatura: $y'' = \frac{2x(x^2-27)}{(x^2+9)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{27}, 0, \sqrt{27} \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, -\sqrt{27})$	$(-\sqrt{27}, 0)$	$(0, \sqrt{27})$	$(\sqrt{27}, \infty)$
sgn y''	-	+	-	+
y	∩	∪	∩	∪

Puntos de inflexión : $(-3\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{12})$; $(0, 0)$; $(3\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{12})$



7 Estuda e representa a función $y = e^{-x^2}$

Solución:

- Dom $y = \mathbb{R}$
- Simetría: $y(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} \Rightarrow$ é par, simétrica respecto do eixe OY
- Puntos de corte cos eixes:
 $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y = e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \text{Non corta o eixe OX} \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0,1) \end{cases}$
- Signo: a función é sempre positiva
- Asíntotas: non ten AV;
 AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow y_H = 0$. A function vai sempre por enriba da asíntota horizontal, por ser positive. Non ten A Ob por ter horizontal

- Monotonía: $y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y'	+	-
y	C↑	D↓

- Puntos críticos: máximo en $(0,1)$

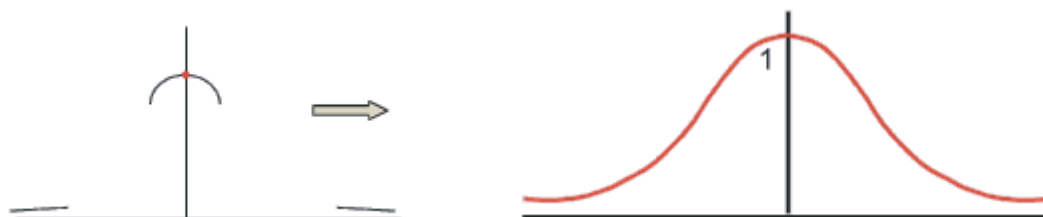
- Curvatura:

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
sgn y''	+	-	+
y	U	∩	U

Puntos de inflexión: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$



8 Estuda e representa a función $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

Solución:

i. Dominio: $DEN > 0 \Rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}$

ii. Simetrías: $y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = y(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto do eixe OY

iii. Puntos de corte cos eixes: $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = 0$ (dobre) \Rightarrow A función corta os eixes na orixe de coordenadas (0, 0).

iv. Signo: a función é sempre positiva

v. Asíntotas: non ten AV;

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y_H = 1$. A función achégase á asíntota

como: $y - y_H = \frac{x^2}{x^2+1} - 1 = \frac{-1}{x^2+1} < 0 \Rightarrow y < y_H$. Non ten A Ob

vi. Monotonía: $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
 $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases}$

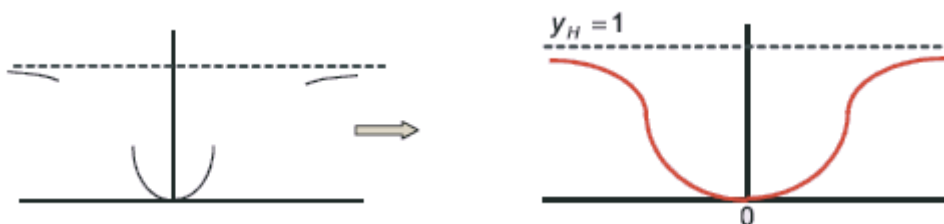
	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sgn } y'$	+	-
y	C↑	D↓

vii. Puntos críticos: mínimo en (0, 0)

viii. Curvatura:

$$y'' = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ DEN > 0 \end{cases}$$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$



9 Estuda e representa a función $y = \frac{1-x^2}{(x+2)^2}$

Solución:

i. Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow -2$ (dobre) $\Rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

ii. Simetrías: $y(-x) = \frac{1-(-x)^2}{(-x+2)^2} = \frac{1-x^2}{(2-x)^2} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ Non é simétrica

iii. Puntos de corte cos eixes:

$$\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1,0); (-1,0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

iv. Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbf{R} - \{-2\} \end{cases}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn y	-	+	-

iv. Asíntotas: AV: $x = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x^2}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{(x+2)^2} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y_H = -1$. Achégase como:

$$y - y_H = \frac{1-x^2}{(x+2)^2} + 1 \approx \frac{4x+5}{(x+2)^2} \approx \frac{4}{x} \begin{cases} < 0, \text{cando } x \rightarrow -\infty \\ > 0, \text{cando } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Non ten A Ob por ter AH

v. Monotonía: $y' = \frac{-2(2x+1)}{(x+2)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2(\text{triple}) \end{cases}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
sgn y'	+	-	+
y	U	∩	U

vi. Puntos críticos: Máximo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

vii. Curvatura: $y'' = \frac{2(4x+1)}{(x+2)^4} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbf{R} - \{-2\} \end{cases}$

Punto de inflexión: $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{27}\right)$

	$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$
sgn y''	-	+
y	∩	U

