

Exercicios de autoavaliación

Exercicio nº 1.-

Estuda e representa a función $y = x^3 - 3x$

Exercicio nº 2.-

Constrúe a curva $y = \frac{1}{1+x^2}$

Exercicio nº 3.-

Estuda e representa a función $y = \frac{x^2}{x^2-4}$

Exercicio nº 4.-

Constrúe a curva $y = \frac{8(x-1)^2}{x^3}$

Exercicio nº5.-

Representa a función $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

Exercicio nº 6.-

Constrúe a curva $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2$

Exercicio nº 7.-

Representa a función $y = \frac{e^x}{x}$

Exercicio nº 8.-

Estuda e representa a función $y = \frac{4-2x^2}{x}$

Exercicio nº 9.-

Estuda e representa a función $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Exercicio nº 10.-

Constrúe a curva $y = \frac{x^4}{x^2-1}$

Solucións

Exercicio nº 1.-

i. Dom $y = \mathbb{R}$

ii. $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -y(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto a orixe de coordenadas

iii. $f \cap OX \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow (-\sqrt{3}, 0); (0, 0); (\sqrt{3}, 0); f \cap OY \Rightarrow (0, 0)$

iv.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
sgn y	-	+	-	+

v. Non ten Asíntotas Verticais (AA VV) por ser un polinomio

Asíntota horizontal (AH): $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x) = \pm\infty \Rightarrow$ Non ten AH

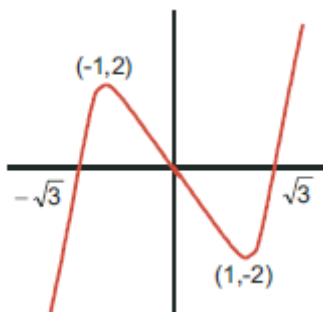
Asíntota Oblícuca (A Ob): $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \infty \Rightarrow$ Non ten A Ob

vi. $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn y'	+	-	+
y	\uparrow	\downarrow	\uparrow

vii. Máximo en $(-1, 2)$ e mínimo en $(1, -2)$

viii. $y'' = 6x \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = 0 =$ Punto de inflexión $(0, 0)$



	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y''	-	+
y	\cap	\cup

Exercicio nº 2.-

i. Dom $y = \mathbb{R}$ pois o denominador é sempre positivo;

ii. $y(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = y(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto do eixe OY.

iii. $f \cap OX \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow$ non corta o eixe OX; $f \cap OY \Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$.

iv. A función é sempre positiva, porque o son o seu numerador e o seu denominador.

v. Non ten AA VV; AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow y_H = 0$; $y > y_H$ porque y é positiva.

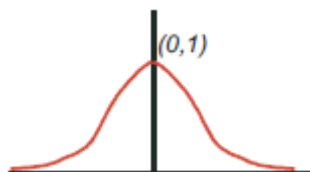
vi. $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y'	+	-
y	C↑	D↓

vii. Máximo en $(0, 1)$

viii. $y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ DEN > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos de inflexión } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
sgn y''	+	-	+
y	U	∩	U



Exercicio nº3.-

i. Dom $y = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

ii. $y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4} = y(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto do eixe OY;

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow$ a función corta aos eixes na orixe de coordenadas;

iv. $\begin{cases} NUM > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2) - \{0\}$	$(2, \infty)$
sgn y	+	-	+

v. AA VV: $x = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y_H = 1$

Non ten A Ob por ter AH. $\text{sgn}(y - y_H) = \text{sgn}\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right) > 0$, cando $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y > y_H$

vi. $y' = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{\pm 2\} \end{cases} \Rightarrow$

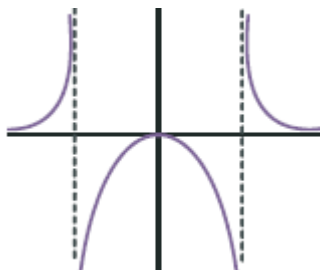
	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y'	+	-
y	C↑	D↓

vii. Máximo en $(0, 0)$

viii. $y'' = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} > 0 \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \text{ (triple)} \end{cases} \Rightarrow$

\Rightarrow Non ten puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
sgn y''	+	-	+
y	U	n	U



Exercicio nº4.-

i. Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

ii. Non é simétrica;

iii. $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (dobre)} \Rightarrow (1, 0) \\ f \cap OY \Rightarrow \nexists y(0) \Rightarrow \text{non corta ao eixe OY} \end{cases}$

iv.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty) - \{1\}$
sgn y	-	+

v. AA VV: $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8(x-1)^2}{x^3} = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8(x-1)^2}{x^3} = \frac{8}{0^+} = \infty \end{cases}$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8(x-1)^2}{x^3} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow y_H = 0 \Rightarrow$ Non ten
asíntota A Ob por ter AH

$\text{sgn}(y - y_H) \approx \text{sgn}\left(\frac{8}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} < 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_H \\ > 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_H \end{cases}$

vi. $y' = \frac{8(-x^2+4x-3)}{x^4} \Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \\ \text{DEN} > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
sgn y'	-	+	-
y	D↓	C↑	D↓

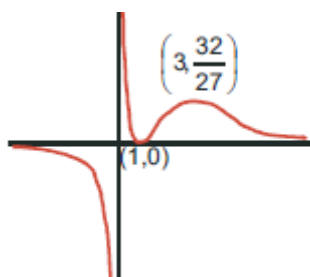
vii. Mínimo en $(1, 0)$ e máximo en $\left(3, \frac{32}{27}\right)$

viii. $y'' = \frac{16(x^2-6x+6)}{x^5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} = 0 \Rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{3}; x_2 = 3 + \sqrt{3} \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (quíntuplo)} \end{cases} \Rightarrow$

\Rightarrow Puntos de inflexión en $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ con $y_1 \approx 0,282; y_2 \approx 1,052$

	$(-\infty, 0)$	$(0, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
sgn y''	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$
y	n	U	n	U



Exercicio nº5.-

i. Dom $y = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

ii. $y(-x) = -\frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow$ impar, simétrica respecto a orixe de coordenadas

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ é o punto de corte con ambos os dous eixes

iv. $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$	sgn y	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
		$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{+}{-} = -$

v. AA VV: $x = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}; x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x) = -\infty \Rightarrow$ Non ten AH

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x-x^3} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$; $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{Ob} = -x \Rightarrow \text{sgn}(y - y_{Ob}) \approx \text{sgn}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} > 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y > y_{Ob} \\ < 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y < y_{Ob} \end{cases}$

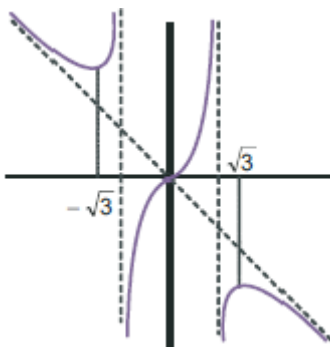
vi. $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (dobre)}, \pm\sqrt{3} \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{\pm 1\} \end{cases} \Rightarrow$

\Rightarrow	$(-\infty, -\sqrt{3}) - \{-1\}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - \{0, 1\}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
sgn y'	-	+	-
y	D↓	C↑	D↓

vii. Mínimo en $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ e máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

viii. $y'' = \frac{6x(x^2+1)}{(1-x^2)^3} \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$ Punto de inflexión (0,0)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
sgn y''	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{+}{-} = -$
y	U	∩	U	∩



Exercicio nº6.-

i. Dom $y = \mathbb{R}$

ii. Par, simétrica respecto do eixe OY: $y(-x) = (-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 = x^4 - \frac{3}{2}x^2 = y(x)$

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1,22, x = 0, \text{ e } x = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0); (0, 0); (\sqrt{\frac{3}{2}}, 0); (0,0)$ é o punto de corte con ambos os dous eixes

iv.

	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \{0\}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty \right)$
sgn y	+	-	+

v. Non ten AA VV; AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right) = \infty \Rightarrow$ Non ten AH

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - \frac{3}{2}x^2}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \Rightarrow$ Non ten A Ob;

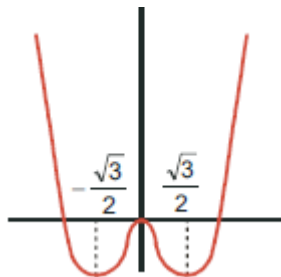
vi. $y' = 4x^3 - 3x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = 0 \text{ e } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

\Rightarrow

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty \right)$
sgn y'	-	+	-	+
y	D↓	C↑	D↓	C↑

vii. Mínimos en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{16} \right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{9}{16} \right)$; máximo en $(0,0)$;

viii. $y'' = 12x^2 - 3 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$ Puntos de inflexión: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{16} \right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{16} \right)$



	$\left(-\infty, -\frac{1}{2} \right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty \right)$
sgn y''	+	-	+
y	U	∩	U

Exercicio nº 7.-

i. Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

ii. $y(-x) = \frac{e^{(-x)}}{-x} = -\frac{1}{xe^x} \neq y(x) \Rightarrow$ Non é simétrica

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow$ Non
 OX ; $f \cap OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Non
punto.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y	-	+

corta ao eixe
definida neste

iv. Como e^x é positiva para todo $x \Rightarrow$

v. Asíntotas: AV: $x = 0$;

AH: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-xe^x} = 0 \Rightarrow y = 0$. Non ten A Ob.

vi. $y' = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 1$

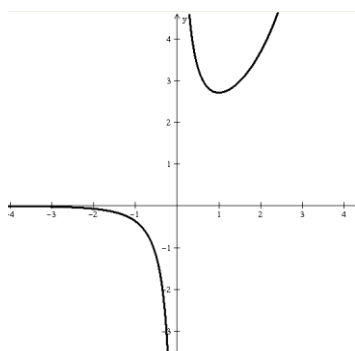
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
sgn y'	-	+
y	D↓	C↑

vii. Mínimo en $(1, e)$

viii. $y'' = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3} \neq 0$

Non ten puntos de inflexión

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y''	-	+
y	∩	∪



Exercicio nº 8.-

i. Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

ii. $y(-x) = \frac{4-2(-x)^2}{-x} = -\frac{4-2x^2}{x} = -y(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto a orixe de coordenadas.

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, 0); (\sqrt{2}, 0)$. $f \cap OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow Non definida neste punto.

iv.

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
sgn y	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$

v. Asíntotas: AV: $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4-2x^2}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-2x^2}{x} = \infty \end{cases}$

A Ob: $y = -2x$

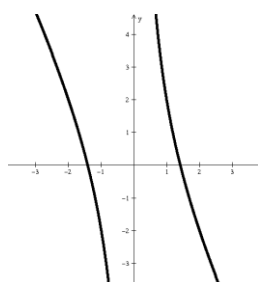
$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y - y_{Ob}) = \operatorname{sgn}(y + 2x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{4}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} < 0, \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_{Ob} \\ > 0, \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_{Ob} \end{cases}$

vi. $y' = \frac{-2x^2-4}{x^2}; y' < 0$

vii. Non ten máximos e mínimos

viii. $y'' = \frac{8}{x^3} \Rightarrow$

\Rightarrow Non ten puntos de inflexión



	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} y'$	-	-
y	D↓	D↓

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} y''$	-	+
y	∩	∪

Exercicio nº 9.-

i. Dom $f = \mathbb{R}$

ii. $y(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} \neq \frac{e^x-e^{-x}}{2} \neq y(x) \Rightarrow$ Non é simétrica

iii. $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ é o punto de corte con ambos os dous eixes

iv. $x < 0 \Rightarrow e^{2x} < 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} y$	-	+

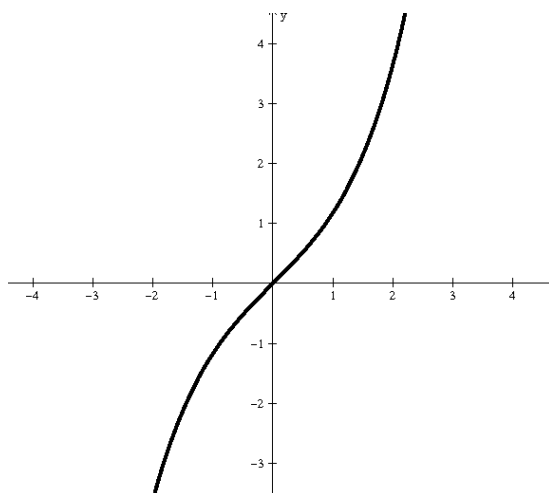
v. Non ten asíntotas

vi. $y' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow$ En \mathbb{R} é crecente

vii. Non ten máximos e mínimos

viii. $y'' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = 0$
Ten un punto de inflexión en $(0,0)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\operatorname{sgn} y''$	-	+
y	∩	∪



Exercicio nº 10.-

i. $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

ii. $y(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^4}{x^2 - 1} = y(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto o eixe OY}$

iii. $f \cap \text{OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ é o punto de corte con ambos os dous eixes

iv. AV : $x = 1$; $x = -1$.

v. $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4}{x^2 - 1} = \infty \end{cases} \quad x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4}{x^2 - 1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4}{x^2 - 1} = -\infty \end{cases}$

Non ten asíntotas horizontais e oblicuas.

vi. $y' = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow y' = 2x^3(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
sgn y'	-	+	+	-	-	+
y	D↓	C↑	C↑	D↓	D↓	C↑

vii. Máximo: $(0, 0)$; Mínimos: $(-\sqrt{2}, 4)$; $(\sqrt{2}, 4)$

viii. $y'' = \frac{2x^2(x^4 - 11x^2 + 8x + 6)}{(x^2 - 1)^3} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow \text{non sabemos neste curso resola ecuación de 4º grao} \Rightarrow \text{Representamos a función cos datos que temos.}$

